Title: Der Plankalkül
Author(s): Konrad Zuse
Date: 1972
Published by: Konrad Zuse Internet Archive
Source: Document - ZIA ID: 0020

Kapitel 1

Allgemeines

~~Inh~~ Inhaltsverzeichnis:

e) Rechenplangleichungen. ~~Das~~
Das „Ergibt"-Zeichen

f) Unterpläne Seite

g) Operationszeichen, Funktionszeichen.

4) <u>Quasistarre Rechenpläne</u>

a) Definition
b) Variable Operationszeichen
c) Variable Planzeichen
d) Variables Negationszeichen
e) Variables Strukturzeichen
f) Variation der Gliedzahl von Strukturen
~~g)~~ Allgemeines über Variation ~~von~~ der Rechenpläne
h) Bemerkung

5) <u>Freie Rechenpläne</u>

a) Variables Schlusszeichen
b) Bedingte Planteile
c) Variabl Indizes
d) Angaben variablen Umfangs
e) Erzeugung von Rechenplänen

6) <u>Wiederholungspläne</u>

1

7) Operationen des Prädikatenkalküls

Seite

a) Die All- und Existenzoperatoren

b) Der Operator "Diejenigen, welche".

c) Der Operator „Derjenige, welcher".

d) Der Operator „Das nächste

e) Der Operator „Das „letzte".

f) μ = Operator rechts vom Ergebnis-zeichen.

g) Benennung der Variablen und Zwischenwerte

h) Implizite und explizite Ausdrücke mit Operatoren.

8) Verschiedenes

a) Die Operatoren $\Lambda R, VR, \Sigma R, \Pi R$

b) Darstellung von Potenzen

c) Nulliste und Variable als ~~Liste~~ mit einem Glied

d) Behauptungszeichen.

```
  | W1(N(V)) [ (V , -) ⇒ Z     ] |  + ⇒ Z
V |      0      0         1      |      2
K |             i         i      |
S |             σ       (σ,0)    |      0

  | W [ (Ex) [ x ∈ Z          ∧ x̄ ] ∧ Z  →
V |              1                    2
K |                             1
S |      [ (σ,0)  m×(σ,τ)       0 ]   0

  |     W1(N(V)) [ Z    ∧  R□(Z)  →
V |          0     1         1
K |                i.1       i.0
S |                0         σ

  |             [ Z   ⇒  Z | + ⇒ Z   | + ⇒ Z | P(Z) | FIN^3 ] ] ]
V |               1      0 |     1   |     2 |   0  |
K |               i.0      |     i.1 |       |      |
S |               σ      σ |     0   |     0 |      |
```

Dipl.-Ing. K. Zuse
Ingenieurbüro
und Apparatebau
Berlin

Kap. 1

~~Theorie der angewandten Logistik~~

~~2. Buch~~

Der Plankalkül

Inhalt

Kap. 1: Allgemeine~~r Plankalkül~~

Kap. 2: Allgemeine Rechenpläne

Kap. 3: Rechenpläne der Zahlenrechnung (Einführung)

Kap. 4: Operationen mit algebraischen Ausdrücken (Einführung)

Kap. 5: Schachtheorie (Einführung)

allgemein i
Grössere Zeilen Abstand
(Vorsicht bei Formeln)

Der Plankalkül

Kap. 1: Allgemeines

Voraussetzung: Es wird die ungefähre Kenntnis des ersten Teils der Arbeit: "Ansätze einer Theorie des allgemeinen Rechnens ..." vorausgesetzt. (Bei Hinweisen im folgenden kurz mit "Ansätze" bezeichnet).

I. Aufgabe:

Aufgabe des Plankalküls ist es, beliebige Rechenvorschriften rein formal darzustellen. Diese Rechenvorschriften oder auch Rechenpläne genannt, müssen folgende Bedingungen erfüllen:

1) Es muss aus Ihnen eindeutig hervorgehen, aus welchen Variablen welche Resultatwerte abgeleitet werden sollen.
2) Sämtliche Ansätze für die erforderlichen Zwischenwerte und Endresultate müssen explizit entwickelt sein, d.h. so dass nach Einsetzen der Variablen das Resultat ohne weitere, im Rechenplan nicht vorgeschriebene Umformungen abgeleitet werden kann.

Die Arten der Rechenvorschriften können dabei sehr mannigfaltig sein. Es gilt die Definition des Rechnens:

"Aus gegebenen Angaben nach einer Vorschrift neue Angaben bilden"
~~(s. "Ansätze" S.4)~~

Im Gegensatz zu den in den "Ansätzen" behandelten starren Rechenplänen wird hier das Gesamtgebiet der Rechenpläne einschliesslich der starren Rechenpläne behandelt.

II. Aufstellung des allgemeinen Plankalküls

1) Allgemeine Ordnungsbezeichnungen:
Dort, wo Zahlen zur Ordnung von Elementen verwandt werden, werden diese zunächst im Dezimal - System geschrieben. Jedoch unter Bevorzugung einer Einteilung, die eine leichte Übertragung ins Sekundal - System ermöglicht. (Z.B. 0, 8, 16, 48, 64, 72, 128 usw.)
Unterteilungen können durch Punkte vorgenommen werden; Z.B. 1.3 , 2.13.1 (Z.B. bei Komponentendarstellungen. Siehe dort).
Um innerhalb eines Plangebäudes (z.B. der Schachtheorie) die dauernde Wiederholung der Kennzeichnung dieser Plangruppe bei allen ein-

zelnen Rechenpläne, Angabenstrukturen usw. zu vermeiden, kann das Zeichen "Δ" als Ersatz für die Plangruppenbezeichnung genommen werden. Z.B. PΔ13 als Bezeichnung für Plan 13 der Plangruppe Δ. Bei Verwendung dieses Planes ausserhalb des Plangebäudes muss dann das allgemeine Plangruppenzeichen Δ durch das spezielle ersetzt werden. Es wird ferner ein allgemeines beziehungs~~loses Leerstellen~~zeichen □ eingeführt.
Dies besagt lediglich, dass an der betreffenden Stelle eine passende Angabe eingesetzt werden kann, ohne dass diese Angabe in einer Beziehung zu anderen Leerstellen mit dem Zeichen □ steht.
Jedoch können diese Leerstellenzeichen innerhalb eines Rechenplanes durch Einsetzen von Ziffern in die Leerstellen miteinander in Beziehung gebracht werden. (Beispiel: ~~9.52~~)
S. ~~35~~

2) Angaben und ihre Darstellung:
Die auftretenden Angaben können mannigfacher Art sein. Z.B. J.N. - Werte, Zahlen, Listen usw.
Es wurde in den "Ansätzen" (s. dort S.12) bereits der Begriff der "algebraischen Dimension" eingeführt.
Die Unterscheidung der einzelnen Angabenarten soll nun wie folgt formalisiert werden:

a) Angaben - Strukturen
Unter "Struktur" einer Angabe wird der komponentenmässige Aufbau einer Angabe ohne Hinblick auf die Bedeutung der einzelnen Fälle und Komponenten verstanden.
Wir haben Angaben von starrer und von variabler Struktur. (s. "Ansätze" S.11). Wir führen nun Angabenstrukturzeichen ein, welche jeder Angabe zugeordnet sind. Diese werden mit S und einer Kennzahl bezeichnet. Die Entwicklung der zusammengesetzten Strukturen erfolgt dann durch "Strukturgleichungen" aus einfachen (bereits definierten) Strukturen.
So wird dem einfachen Ja - Nein - Wert das Strukturzeichen So zugeordnet. Eine Folge von n J.N.-Werten hat dann die Struktur S1.n. Es gilt die Strukturgleichung:

$$S1.n = n \times S0$$

Durch Verfolgung der Strukturgleichungen ist es jederzeit möglich, den Aufbau einer Angabe zu ermitteln, auch wenn dieser sehr kompliziert ist.

Wir brauchen noch " unbestimmte " Strukturzeichen. Wollen wir z.B. andeuten, dass eine Angabe aus einer Liste von n Gliedern besteht, ohne die Struktur des Gliedes im einzelnen festzulegen, so schreiben wir: $n \times \sigma$
Für σ kann dann ein beliebiges Strukturzeichen eingesetzt werden.
$\square \times \sigma$ Ist das allgemeinste Strukturzeichen einer Liste. (Struktur der Glieder und Zahl der Glieder offen gelassen).
$\square \times 2\sigma$ Ist die Struktur einer Paarliste, bei der die Glieder der einzelnen Paare von gleicher Struktur σ sind.

$\square \times (\sigma, \tau)$ Ist die Struktur einer Paarliste bei der die Vorderglieder die Struktur σ, und die Hinterglieder die Struktur τ haben.

$2 \times m \cdot \sigma$ Ist keine Paarliste, sondern ein Paar von Listen
Unter $N(V_o)$ sei die Bliedzahl (Zahl der Komponenten erster Stufe) der Angabe (Liste) V_o verstanden.

b) <u>Angaben - Beschränkungen:</u>
Eine Angaben - Beschrankung liegt vor, wenn die volle Variabilität der zu einer Angabenart gehorenden Struktur nicht voll ausgenutzt ist.
Z.B. können Dezimalziffern durch 4 J.N. - Werte dargestellt werden. Es werden jedoch nur 10 von den 16 möglichen Variationen ausgenutzt.
In solchen Fällen wird durch eine Beschränkungsformel angegeben, welche Fälle der Struktur in den Definitionsbereich der Angabenart fallen. Eine solche Formel wird mit B und einer Kennzahl bezeichnet.
Bezeichnen wir die einzelnen J.N. - Werte einer Dez. - Ziffer mit a_o, a_1, a_2, a_3, so lautet die Beschränkungsformel für Dezimalziffern wie folgt:

$$\bar{a}_3 \vee \overline{a_1 \vee a_2}$$

Dieser Formel genügen aus der Menge der ~~Sekundal~~ Dualzahlen 0 bis LLLL nur die Zahlen 0 bis L00L.
Derartige Beschränkungen können auch darin bestehen, dass einzelne Komponenten zu Konstanten werden. So ist es oft vorteilhaft, eine Liste durch die Listennummern zu ergänzen. Wir erhalten so die Liste der Indizes der einzelnen Komponenten einer Angabe. Diese ist unabhängig von den einzelnen Variationen der Angabe. (Vergl. Schachtheorie S. ff.).

c) <u>Angabentypen:</u>
Den gleichen Strukturen und Beschränkungsformeln können Angaben verschiedener Bedeutung zugeordnet sein.
(Z.B. x - und y - Koordinaten). Im allgemeinen ist es nicht nötig, diese zu unterscheiden. Ist dies jedoch vorteilhaft, so werden Typenbezeichnungen eingeführt. Z.B. T_1, T_7 usw.

d) <u>Angabenart:</u>
Jeder Angabenart ist eine Struktur und ev. eine Beschränkung bzw. eine Typenbezeichnung zugeordnet. Darüber hinaus kann eine Angabenart noch durch spezielle Bedeutungen der Komponenten gekennzeichnet sein. (Z.B. Zahlen in halblogarithmischer Form, vergl. Zahlenrechnung S. ff).
Alle diese Kennzeichnungen können dann unter einem Angabenzeichen A zusammengefasst werden. Ist eine Angabe durch ein A - Zei-

chen z.B. A 10 gekennzeichnet, so ist die besondere Kennzeichnung der Struktur usw. nicht erforderlich, da diese in A 10 mitenthalten ist.
Angabenart - Zeichen können jedoch auch einer Gruppe analoger Angabenarten verschiedener Struktur zugeordnet sein. Z.B. können Zahlen durch verschiedene Strukturen (Z.B. Sek.-Zahlen, Dez.-Zahlen) dargestellt werden. Jedoch kann ein allgemeines Zeichen (z.B. A 8 Vergl. Zahlenrechnen S.) eingeführt werden, welches lediglich besagt, dass es sich um eine Zahl handelt, ohne ihre Struktur im einzelnen festzulegen.
Wir führen entsprechend σ ein unbestimmtes Angabenartzeichen α ein. (Vergl. S.).

e) Komponenten von Angaben:
Die Teilangaben, aus denen Angaben zusammengesetzt sind, werden als Komponenten bezeichnet. Der komponentenmässige Aufbau einer Angabe ergibt sich aus den Strukturgleichungen. Auf Grund der Strukturgleichung

$$S1.3 = 3 \times So$$

besteht die Struktur S1.3 aus 3 Komponenten der Struktur So (Ja-Nein - Wert).
Diese werden mit Ko, K1, K2 bezeichnet.
Nun können die Komponenten wieder zusammengesetzt sein. Beispiel: Ganze Dez.-Zahlen

$$n \times S1.4 = n \times 4 \times So$$

Hier bedeuten K_o, K_1 ... K_{n-1} die einzelnen Dez.-Ziffern, welche wiederum in

Ko.o	Ko.1	Ko.2	Ko.3
K1.o	K1.1	K1.2	K1.3
..	..	..	..

zerlegbar sind. Auf diese Weise kann durch dazwischensetzen von Punkten die Komponentenbezeichnung beliebig gegliedert werden.
Es ist also die Reihenfolge der Faktoren in den Strukturansätzen nicht gleichgültig. Es gilt z.B.

$$n \times 4 \times So \neq 4 \times n \times So$$

Im ersten Fall haben wir es mit n Gliedern die aus 4 J.N.-Werten bestehen, zu tun, im zweiten Fall mit 4 Folgen von je n J.N.-Werten. Ko hat im ersten Fall die Struktur S1.4, und im zweiten Fall die Struktur S1.n.
Bei den besprochenen Beispielen sind die Komponenten homogen. Jedoch ist das nicht nötig. Z.B. können wir die Dez.-Zahl durch ein Vorzeichen ergänzen. Wir erhalten dann die Struktur:

$$(So, n \times S1.4)$$

K_o ist jetzt von der Struktur S_o, K_1 von der Struktur $n \times$ Sl.4.

Ko kann nicht weiter in Komponenten unterteilt werden, wohl aber Kl.
Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass bei einer aus n Gliedern bestehenden Angabe der höchste Index der Komponenten gleich n-1 ist, da die Komponentennummerierung mit 0 beginnt.

f) <u>Darstellung der Angaben:</u>
Die unbestimmte Darstellung der Angaben erfolgt durch Buchstaben mit Index. Z.B. V_1, χ_3 usw.
Werden mehrere Angaben zu neuen zusammengesetzt, so erfolgt dies durch Einklammern, wobei zwischen die Angaben ein Komma gesetzt wird:

$$(a,b) = C$$

Bei derartigen Darstellungen wird <u>stets</u> die Komponente mit dem niedrigeren Index zuerst geschrieben. (Also auch bei unbestimmter Darstellung von Zahlen werden die Zeichen für die niederen Potenzen zuerst geschrieben).
Die bestimmte Darstellung erfolgt im allgemeinen durch Minus bzw. Plus - Zeichen. Bei Zahlen und Nummern können Ziffern verwandt werden. (Z.B. Dez.- Ziffern 0 - 9, oder Sek.-Ziffern O,L). Dabei muss die Angabe natürlich restlos in ihre Komponenten zerlegt sein. (Entsprechend der Strukturdefinition). Bei der Darstellung mit Minus und Plus-Zeichen werden ebenfalls die Komponenten mit den kleineren Indizes zuerst geschrieben. (Also links). Bei Darstellung mit Ziffern werden jedoch entsprechend dem allgemeinen Brauch die Ziffern mit dem höchsten Index (also der höchsten Stellen) links geschrieben. Es entsprechen sich also folgende Darstellungen:

LLO = -++
LOLO = -+-+
83 = LOCO , COLL = (++-- , ---+)

Hierauf muss sorgfältig geachtet werden.
Es wird noch das Zeichen o für die allgemeine Unbestimmtheit eines Ja-Nein-Wertes eingeführt (Indifferenz), jedoch in Zusammenhang mit + und -. Schreibt man z.B. a = + - o, so bedeutet dies, dass die Ko pos., Kl neg. sein muss und K_2 einen beliebigen Wert annehmen kann. Die Bedingung für die Geradzahligkeit einer 4 stelligen Sek.-Zahl kann man dann z.B. wie folgt ansetzen:

$$X = -ooo - ooo$$

Nur die Komponente 0 unterliegt hier einer Bedingung.
Das Zeichen O kann allgemein als Stellvertreter einer Folge von Minuszeichen verwandt werden. (Auch wenn diese nicht die Bedeutung einer Zahl haben).

g) Die Zeilendarstellung:
Um die zu einer Angabe gehörenden verschiedenen Kennzeichnungen, wie Variablen - Index, Komponentenangabe, Angabenart bzw. Struktur usw. übersichtlich darstellen zu können, werden diese einzelnen Kennzeichnungen je verschiedenen Zeilen einer Formel zugeordnet.
Wir haben zunächst die Hauptzeile, in welcher die Formel in der bisher üblichen Art dargestellt wird.
Die nächste Zeile dient der Unterscheidung der verschiedenen Variablen, welche durch den "Variablen - Index" erfolgt. (V).
Eine weitere Zeile dient der Kennzeichnung der Komponenten der durch die Zeile 1 und 2 gekennzeichneten Variablen. (Komponentenindex K).
Es wird also z.B. der Ausdruck

$K1(V_3)$ (Komponente 1 von V_3)

wie folgt geschrieben: $\begin{matrix} V \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$

bzw. $K2.3(\underset{4}{Z}) = \begin{matrix} Z \\ 4 \\ 2.3 \end{matrix}$

Weitere Zeilen können der Kennzeichnung der Struktur und Angabenart bzw. der Beschränkung und dem Typ dienen.
Im allgemeinen wird entweder die Angabe der Struktur oder der Angabenart genügen.
(S = Index bzw. A = Index)

z.B. $\begin{matrix} Z \\ 4 \\ 2.3 \\ 0 \end{matrix}$ bedeutet: "Z_4, Komponente 2.3. Der Wert ist von der Struktur So".

Die Strukturangabe bzw. Angabenart - Angabe bezieht sich dabei auf die Komponente.
Die einzelnen Zeilen werden durch Vorsetzen der Buchstaben V, K, S bzw. A vor die Zeilen der Formel gekennzeichnet:

	Z	$\wedge$	Z
V	4		2
K	2.3		
S	0		0

Wird von einer Angabe keine Komponente gebildet, so bleibt der Komponentenindex frei.
Das Zeichen A kann stets an Stelle des Zeichens S gesetzt werden, aber im allgemeinen nicht umgekehrt. Die für Strukturen bereits definierten Kennzahlen dürfen dann nicht mehr für Angabenarten benutzt werden: (Z.B. gibt es nur eine Struktur So, S1.n und die Zeichen Ao, A1.n sind mit diesen Strukturzeichen identisch.)
Mit Hilfe dieser Darstellung ist es leicht möglich, die einzelnen Angabenarten zu unterscheiden. Es ist nicht mehr, wie bisher in der Mathematik, nötig, verschiedene Zeichenarten für verschiedene Angabenarten heranzuziehen. (Z.B. deutsche Buchstaben für

Vektoren). Ein solches Verfahren wäre im allgemeinen Plankalkül nicht anwendbar, da die Zahl der verschiedenen Angabenarten innerhalb der gleichen Rechenpläne bzw. Plangruppen derartig mannigfaltig sein kann, dass die zur Verfügung stehenden Zeichenarten nicht ausreichen.

h) Constanten:
Den einzelnen Angabenarten, Typen bzw. Strukturen können Constanten zugeordnet werden, denen spezielle Bedeutung zukommt. Eine Constante ist ein bestimmter Fall aus der Menge der möglichen Variationen einer Angabenart bzw. Struktur. Sie werden mit C und einer Kennzahl bezeichnet. Die Kennzahl bezieht sich im allgemeinen auf die Angabenart bzw. Struktur.
(Vergl. Schachtheorie S.   ).

i) Angabenergänzung durch Komponentennummerierung:
Jede zusammengesetzte Angabe kann durch eine Constante ergänzt werden, welche in der Aufzählung der einzelnen Indizes der einzelnen Komponenten der Angabe besteht. (Siehe Schachtheorie S. vergl. S.   ). Diese Werte werden mit J( ) bezeichnet. (Gelesen Index von ...).
Es hat dies z.B. eine Bedeutung, wenn es interessiert, an welcher Stelle einer Liste ein Glied mit einer bestimmten Eigenschaft steht. (Z.B. Schachspiel: Punktangabe desjenigen Feldes auf dem der weisse König steht).
Diese Aufgabe lässt sich mit Hilfe der Erweiterung der Angabe durch die Liste der Indizes lösen. Jedoch braucht diese Erweiterung nicht immer formal durchgeführt zu werden, da die Kennzeichnung eindeutig besagt, was gemeint ist.

Adresse von ...

j) Angaben von starrer und variabler Struktur:
Die Gesamtheit der für eine gegebene Angabenart auf Grund ihrer Struktur und Beschränkungsformel möglichen Variationen stellt die Menge der möglichen Fälle einer Angabe dar.
Bei Angaben von starrer Struktur sind sämtliche Fälle von gleicher Struktur.
Bei Angaben von variabler Struktur haben nicht alle Fälle die gleiche Struktur. Dies gilt z.B. für Listen von verschiedener Gliedzahl. (Z.B. Schachspiel: "Liste der einstehenden Steine"). Meistens beschränkt sich die Variabilität der Struktur auf die Gliedzahl von Komponenten.
In solchen Fällen ist die Strukturangabe der Variable nicht einfach als Konstante zugeordnet, sondern selbst Bestandteil der Variablen. Diese Angaben spielen bei unstarren Rechenplänen eine Rolle. Die Variable zerfällt dann in die "eigentliche Variable" und die "Struktur - Variable". Die Strukturangabe beeinflusst hier den Ablauf der Rechnung.

3) Starre Rechenpläne

a) Bezeichnung der Rechenpläne:
Die Rechenpläne werden mit P und einer Kennzahl bezeichnet. (Z.B. Pl 10).

Die Kennzahl ist meist unterteilt, wobei sich die erste Komponente auf eine bestimmte Plangruppe, z.B. sämtliche Rechenpläne einer bestimmten Struktur, bezieht. Rechenpläne können beliebig ausgedehnt sein und mehrere Resultatworte haben.

b) Werte eines Rechenplanes:

Formal
Aktual

α) Eingabe ~~Ausgangswerte~~: (Variablen)
Diese werden mit den Buchstaben V und einem Index 0, 1, 2, ... bezeichnet.

β) Zwischenwerte:
Dieses sind Angaben, die während der Rechnung vorübergehend benötigt werden, aber sonst nicht interessieren. Sie werden mit dem Buchstaben Z und einem Index 0, 1, 2, ... bezeichnet.

γ) Constanten:
Diese sind feste Bestandteile des Rechenplanes. Sie werden mit C und darauffolgender Kennzahl bezeichnet. (Vergl. 2) h) S. 7). Es werden allgemeine Constanten und spezielle "Plan-constanten" unterschieden. Die speziellen haben die Bezeichnung Cp mit Index. Sie gelten nur für den betreffenden Plan. (S. Beispiel, Schachtheorie S. PΔ 202).

δ Res Werte

δ) Resultatwerte V ~~(Fortsetzung siehe Seite~~ 41)

Die Indizes von V, Z, Cp und R sind Variablen - Indizes und stehen bei Zeilendarstellung in der V - Zeile. (Vergl. S. 6).

c) Reichweiten der Indizes:
Die Indizes der Variablen, Zwischenwerte und Resultatwerte beziehen sich jeweils nur auf den einzelnen Rechenplan. Ein Wert Z_3 des einen Rechenplanes ist also nicht identisch mit einem Wert Z_3 eines anderen. Treten die Res.-Werte von Rechenplänen innerhalb von anderen Plänen auf, so müssen sie durch das Kennzeichen des Planes, aus dem sie hervorgehen, gekennzeichnet werden. So bedeutet z.B. $R_0 1.10$ den Resultat - Wert o des Rechenplanes Pl.10.

Local
Global

Die Nummerierung der V - Werte und R - Werte muss stets fortlaufend von o aus erfolgen.
Die Kennzeichen der Rechenpläne gelten über den Plan hinaus.
Ebenso die Struktur und Angabenart - Indizes.

d) ~~Randauszug:~~
Unter Randwerten eines Rechenplanes werden die Eingabe ~~Ausgangs~~- und Resultatwerte verstanden. Durch den Randauszug werden diese, sowie ihre Strukturen bzw. Angabenarten gekennzeichnet.
Bei einem Randauszug steht links ein Ausdruck $R(V_0 \ldots V_n)$ mit

sämtlichen Ausgangswerten und rechts die Zusammenfassung sämtlicher Resultatwerte. Z.B.

	R(V ,	V)	⇒	(R ,	R)
V	o	1		o	1
S	1.n	1.n		1.n	o

Dieser Randauszug besagt, dass der betreffende Rechenplan zwei ~~Ausgangs~~werte Eingabe V_o und V_1 der Struktur S1.n hat, und durch ihn zwei Resultatwerte R_o und R_1 bestimmt werden, wobei R_o die Struktur S1.n und R_1 die Struktur So hat.
Derartige Randauszüge können oft für mehrere Rechenpläne gemeinsam aufgestellt werden.
Der Randauszug ist nicht Bestandteil des eigentlichen Rechenplanes, sondern ihm nur zugeordnet.

e) Rechenplangleichungen. Das "~~Ergibt~~" - Zeichen:
Rechenpläne werden durch einzelne explizite Rechenplangleichungen gebildet. in diesen steht links ein Ausdruck, in dem die ~~Ausgangs~~werte Eingabe oder bereits definierte Zwischenwerte enthalten sind und rechts der neu zu bestimmende Zwischenwert bzw. Resultatwert. (Es können auch die Kompononten eines Resultatwertes einzeln gebildet werden). Zwischen beiden Seiten steht das "Ergibt - Zeichen"
Dieses Ergibt - Zeichen kann identisch sein mit dem Gleichheitszeichen ⇒ bzw. mit dem Aequivalenz - Zeichen ∼. Jedoch gilt folgendes:

α) Das Ergibt - Zeichen deutet stets an, dass der rechts davon stehende Wert errechnet werden soll. Es ist also niemals selbst eine Rechenoperation.

β) Treten Gleichheits- bzw. Aequivalenzzeichen innerhalb einer Rechenplangleichung auf, so stellen sie Rechenoperationen dar. Z.B.

	V	=	V	⇒	Z
V	o		1		3
S	1.n		1.n		o

Der Ansatz besagt, dass der Zwischenwert Z_3 pos. ist, wenn $V_o = V_1$ ist, sonst negativ.

γ) Treten links und rechts des Ergibt - Zeichen die gleichen Grössen auf, so sind diese nicht identisch. (Im allgemeinen Zwischenwerte Z).
Die Gleichung $Z_3 + 1 \Rightarrow Z_3$

bedeutet z.B., dass der "bisherige" Wert Z_3 erhöht um 1 den "neuen" Wert Z_3 ergibt.

Eine solche Rechenplangleichung kann also stets ersetzt werden durch eine Gleichung der Art:

$$Z_{3.i} + 1 \Rightarrow Z_{3.i+1}$$

In dieser sind die links und rechts stehenden Grössen durch Unterindizes unterschieden.

δ) Tritt das gleiche Zeichen in mehreren Rechenplangleichungen rechts des Ergibt - Zeichens auf, so gilt stets die letzte Bestimmung des Wertes. Der alte Wert ist dann überholt.

Die Punkte γ) und δ) entsprechen dem bereits bei den Rechenplänen des Gerätes V_4 angewandten Verfahren, Speicherzellen für vorübergehend gebrauchte Zwischenwerte immer wieder neu zu besetzen und die auftretenden Zwischenwerte durch die Nummern der Speicherzellen, in denen sie gespeichert sind, zu kennzeichnen.
Diese Regel bedingt, dass die Reihenfolge der Rechenplangleichungen innerhalb eines Rechenplanes nicht ohne weiteres geändert werden darf.
In Bezug auf das Setzen von Klammern hat das Ergibt - Zeichen stets die grösste Reichweite. (Mit Ausnahme von $\rightarrow$ s. S. 11).
Stehen verschiedene Rechenplangleichungen nebeneinander, so werden sie durch einen senkrechten Strich getrennt. S. auch Bemerkung S. 40 .

f) Unterpläne:
Rechenpläne können auf Unterplänen aufbauen. Diese können wiederum auf weiteren Unterplänen aufbauen. So kann eine mehrfache Verschachtelung von Unterplänen eintreten. Als Unterplan kann grundsätzlich jeder Rechenplan dienen.
Um dies zu kennzeichnen, werden die Resultate des als Unterplan zu verwendenden Rechenplanes mit darauffolgender Klammer aufgeführt, in welcher die Variablen V_o, V_1 des Unterplanes, durch diejenigen Werte ersetzt werden, welche innerhalb des Hauptplanes in den Unterplan eingesetzt werden sollen.
Wir erhalten dann z.B. Ansätze der folgenden Art:

$$\begin{array}{c|lll} & R9.10\,(Z) & \Rightarrow & Z \\ V & o \quad\;\; o & & 1 \\ S & \quad\;\;\; 1.n & & 1.n+1 \end{array}$$ (Vergl. Zahlenrechnung S.)

Dieser Ansatz besagt, dass das Resultat o des Rechenplanes P 9.10 durchgerechnet mit Zo als ~~Ausgangs~~ Eingangswert den Wert Z_1 ergibt.

R_o 9.10 hat hier die Bedeutung eines Funktionszeichens mit einer Leerstelle. Die Zahl der Leerstellen ist gleich der Zahl der Leerstellen des zugehörigen Rechenplanes.
Hierbei müssen selbstverständlich die Strukturen der Variablen mit denen des Randauszuges des zugehörigen Rechenplanes übereinstimmen. In obigem Beispiel haben wir als Randauszug für P 9.10:

$$\begin{array}{c|lll} & R\,(V) & \Rightarrow & (R \quad\quad , R) \\ V & \quad\; o & & \;\; o \quad\quad\;\; 1 \\ S & \quad\; 1.n & & \;\; 1.n+1 \quad o \end{array}$$

Dipl.-Ing. K. Zuse
Ingenieurbüro
und Apparatebau
Berlin

Interessiert nun ausserdem $R9_1.10(Z)_0$, so können die zu $R9_0.10(Z)_0$ und $R9_1.10(Z)_0$ gehörenden beiden Rechenplangleichungen wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{array}{c|ccccc} & R9.10(Z) & \Rightarrow & (Z & , & Z) \\ V & 0 & & 1 & & 2 \\ S & 1.n & & 1.n+1 & & 0 \end{array}$$

Auf die gezeigte Art kann jeder normale Rechenplan als Unterplan verwandt werden. Auch die Anwendung von Operations- und Funktionszeichen (Siehe unten unter g) stellt gewissermassen die Verwendung von Unterplänen dar, nur dass diese nicht als solche gekennzeichnet sind.
Sollen spezielle Pläne nur als Unterpläne innerhalb eines einzigen Rechenplanes dienen, so gibt es hierfür zwei Möglichkeiten:

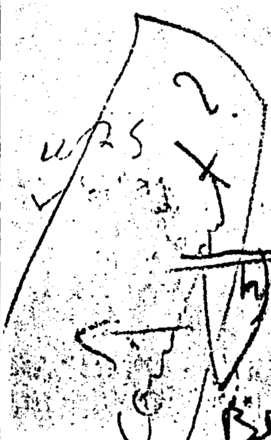
α) Der Unterplan wird wie ein normaler Plan angesetzt nur mit dem Unterschied, dass zur Kennzeichnung als Unterplan anstelle der Bezeichnungen P.. und R.. die Bezeichnungen PZ.. und RZ.. treten. (Analog zu den Zwischenwerten Z).
Zu den Zeichen PZ und RZ treten Kennzahlen 0, 1, 2.. auf, durch welche die verschiedenen Unterpläne eines Hauptplanes unterschieden werden. Die Reichweite dieser Kennzeichnungen erstreckt sich lediglich auf den Bereich des Hauptplanes.
Der Unterplan PZ1 des einen Rechenplanes ist also nicht identisch mit dem Unterplan PZ1 eines anderen Rechenplanes. Die Indizes der Variablen, Zwischenwerte und Resultatwerte erstrecken sich nur auf den Unterplan. (Beispiel siehe S.).

β) Der Unterplan wird als Teil des Hauptplanes aufgezogen. Die Bezeichnungen der Variablen, Zwischenwerte und Resultatwerte des Hauptplanes gelten auch innerhalb des Unterplanes. Wir haben also keine Umbenennung der Variablen.
Diese Unterpläne werden mit Uo, U1, U2.. bezeichnet. Sie gelten ebenfalls nur innerhalb eines Hauptplanes. (Beispiel siehe S.).

9

lhg.

g) Operationszeichen, Funktionszeichen:
Anstelle von Planzeichen P.. bzw. deren Resultatzeichen R.. können in bekannter Weise Operationszeichen verwandt werden. Das empfiehlt sich immer dort, wo es sich um Rechenpläne von allgemeiner Gültigkeit handelt. (Z.B. Operationen des Aussagenkalküls, Operationen der Zahlenrechnung).
Ebenso können nach Art des Prädikatenkalküls der Logistik die Resultate von Rechenplänen durch Buchstabenfolgen gekennzeichnet sein.
(Z.B. POS(χ) für "χ ist Positiv").
(Vergl. hierzu auch Zahlenrechnung S. ,).



h) Die unter 3) betrachteten Rechenpläne sind sämtlich von starrem Aufbau. D.h. der Ablauf der Rechenpläne die Arten der Operationen und die Strukturen der auftretenden Werte sind konstant, also unabhängig von der Variation der Ausgangswerte.

Bemerkung

4) Quasistarre Rechenpläne:

a) Definition:

Unter quasistarren Rechenplänen seien solche verstanden, bei denen gewisse Variationen möglich sind, diese jedoch unabhängig von den eigentlichen Variablen sind. Die Variation des Rechenplanes kann also getrennt von der eigentlichen Rechnung durchgeführt werden, wobei jede Planvariation einen starren Rechenplan ergibt, weshalb solche Rechenpläne als "quasistarr" bezeichnet werden.

Die Variation der Rechenpläne ist dabei eine Funktion von Planvariablen, welche aus variablen Operationszeichen, Planzeichen, Strukturzeichen oder sonstigen Werten bestehen können. Diese Planvariablen stellen gegenüber den eigentlichen Variablen (s.S. [illegible]) eine andere Variationsstufe dar. Stufe 1 (Planvariablen) kann unabhängig von Stufe 2 (eigentliche Variablen) variiert werden, Stufe 2 ist aber abhängig von Stufe 1.

Wir können folgende Fälle unterscheiden:

b) Variable Operationszeichen:

Haben wir z.B. mehrere gleichartig aufgebaute Rechenpläne wie

$$V_0 \wedge V_1 \Rightarrow R_0$$

$$V_0 \vee V_1 \Rightarrow R_0$$

$$V_0 \rightarrow V_1 \Rightarrow R_0$$

so können diese durch Einführung eines variablen Operationszeichens δ zusammengefasst werden:

	V	δ	V	$\Rightarrow$	R
V	0		1		0
S	0		0		0

Anstelle von δ können dann beliebige Operationszeichen zwischen Ja - Nein - Werten (also ^ des Aussagenkalküls) eingesetzt werden. Z.B. $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\sim$.

^ Werten

In diesem Falle ergibt sich die Menge der zur Einsetzung in Frage kommenden Operationszeichen aus der Struktur So der Variablen V_0 und V_1. Ist dies nicht ohne weiteres klar, bzw. soll die Menge der einsetzbaren Zeichen eingeschränkt werden, (z.B. auf die Operationen, für welche das assoziative Gesetz gilt), so müssen diese Operationen am besten durch Aufzählung gekennzeichnet werden.

Der Randauszug eines solchen Rechenplanes muss ~~dass~~ das Operationszeichen ebenfalls als Variable enthalten:

	R (δ,	V ,	V)	$\Rightarrow$	R
V		0	1		0
S		0	0		0

Um dabei die verschiedenen Variationsstufen zu kennzeichnen, können die zugeordneten Variablen durch Klammern getrennt werden und verschieden eng an das Funktionszeichen R gebunden werden:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & (R(\overset{|}{\circ})) & (V & , & V) & \Rightarrow & R \\
V & & 0 & & 1 & & 0 \\
S & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Es ist jetzt deutlich, dass der zugehörige Rechenplan zunächst eine Funktion von $\overset{|}{\circ}$ ist, dessen Resultat dann von V_0 und V_1 abhängt.

X [illegible]

Im obigen Beispiel wurde dem variablen Operations - Zeichen kein Strukturzeichen zugeordnet. Die Struktur von Op.-Zeichen wird im allgemeinen S1.n sein. In komplizierten Fällen müssen eigene Definitionen für die Angabenart der Zeichen eingeführt werden.

Treten mehrere variable Op.-Zeichen auf, so können diese durch Indizes unterschieden werden:

$$\underset{0}{\overset{|}{\circ}}\ ,\ \underset{1}{\overset{|}{\circ}}\ \cdots\ \underset{i}{\overset{|}{\circ}}$$

Diese Indizes werden in die V - Zeile geschrieben.
(S. Schachtheorie PΔ.34 Seite).

c) <u>Variable Planzeichen:</u>
Ebenso wie Operationen können auch innerhalb eines Rechenplanes auftretende Unterpläne variiert werden. Im Prinzip handelt es sich um den gleichen Prozess, da die Op.-Zeichen ja stets durch Planzeichen ersetzt werden können.
Es wird ein variables Planzeichen π eingeführt. Im übrigen gilt sinngemäss das gleiche, wie unter b).
(S. Beispiel S.).

d) <u>Variables Negationszeichen:</u>
Oft unterscheiden sich Rechenpläne nur dadurch, dass Ja-Nein - Werte einmal negiert und einmal nicht negiert auftreten.
So lassen sich zum Beispiel die beiden Operationen der Äquivalenz und der Disvalenz mit Hilfe der Konjunktions- und Disjunktionszeichen wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(V & \wedge & V) & \vee & (\overline{V} & \wedge & \overline{V}) & \Rightarrow & R \\
0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
(V & \wedge & \overline{V}) & \vee & (\overline{V} & \wedge & V) & \Rightarrow & R \\
0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0
\end{array}$$

Die beiden Rechenpläne lassen sich zusammenfassen durch Einführen einer Variablen U von höherer Stufe:

$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & ((V & \wedge & (U & \sim & V)) & \vee & ((\overline{V} & \wedge & (\overline{U} & \sim & V)) & \Rightarrow R \\
V & 0 & & & & 1 & & 0 & & & & 1 & 0 \\
S & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & 0
\end{array}$$

1,5 Setzt man für $\mathfrak{u}$ + ein, so erhält man den ersten Ansatz, setzt man - ein, den zweiten.
Der Randauszug des Planes lautet:

1x
1r

	$(R(\mathfrak{u}))$	$(V,$	$V)$	$\Rightarrow$	R
V		0	1		0
S	0	0	0		0

In diesem Falle kann auch die Struktur von $\mathfrak{u}$ durch So gekennzeichnet werden.
Es hätte an sich auch an Stelle von $\mathfrak{u}$ ein Zeichen V mit Index verwandt werden können. Durch Verwendung von $\mathfrak{u}$ wird jedoch von vorneherein angedeutet, dass es sich um eine Variable höherer Stufe handelt.
(S. Beispiel S.).

e) ~~Variable Strukturzeichen:~~

Index Rechnung

In den "Ansätzen" Seite 52 wurde bereits ein Beispiel gebracht, bei dem Rechenpläne von gleichem Aufbau durch Variation der algebraischen Dimension verschiedene Bedeutung erhalten können. Es wurde gezeigt, dass die Determinante sowohl für Zahlenwerte, als auch für Ja - Nein - Werte sinnvoll angewandt werden kann. Die beiden Rechenpläne unterscheiden sich lediglich durch die Art der Operationszeichen und die Struktur der Variablen.
Die beiden Rechenpläne haben in getrennter Darstellung folgende Form:

α) Determinante 2. Grades für Zahlen: $\Delta = \begin{vmatrix} V_0 & V_1 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}$

	$R\,(V,$	$V,$	$V,$	$V)$	$\Rightarrow$	R
V	0	1	2	3		0
A	8	8	8	8		8

	$V \times$	$V -$	$V \times$	V	$\Rightarrow$	R
V	0	3	1	2		0
A	8	8	8	8		8

Das Angabenartzeichen A 8 besagt, dass es sich um eine Zahl handelt. (S. Zahlenrechnung S.).

β) Determinante 2. Grades für J.N.-Werte.

	$R\,(V,$	$V,$	$V,$	$V)$	$\Rightarrow$	R
V	0	1	2	3		0
S	0	0	0	0		0

	$V \vee$	$V \wedge$	$V \vee$	V	$\Rightarrow$	R
V	0	3	1	2		0
S	0	0	0	0		0

Diese beiden Rechenpläne lassen sich durch Einführen zweier

Operationszeichen $\circ_\sigma$ und $\circ_1$ und eines variablen Angabenartzeichens α wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{array}{c|l}
 & (R(\alpha, \circ, \circ))\ (V, V, V, V) \Rightarrow R \\
V & \qquad\quad\ \ 0\ \ 1 \qquad\quad\ 0\ \ \ 1\ \ \ 2\ \ \ 3 \qquad\ \ 0 \\
A & \qquad\qquad\qquad\quad\ \alpha\ \ \alpha\ \ \alpha\ \ \alpha \qquad\ \ \alpha
\end{array}$$

Variationsfälle:

α	$\circ_0$	$\circ_1$
So	$\vee$	$\wedge$
Ag	$\times$	$-$

$$\begin{array}{c|l}
 & (V \circ V)\ \circ\ (V \circ V) \Rightarrow R \\
V & \ 0\ \ 0\ 3\quad\ 1\quad\ 1\ \ 0\ 2 \qquad\ 0 \\
S & \ \alpha\quad\ \alpha \qquad\quad \alpha\quad\ \alpha \qquad\ \alpha
\end{array}$$

Diese Form ist allerdings wenig anschaulich, weshalb sie beim ersten Aufsetzen einer Theorie zunächst besser nicht angewandt wird. Sie spielt jedoch eine grosse Rolle bei der Aufgabe, Rechenpläne zur Speicherung in Rechenmaschinen möglichst konzentriert darzustellen, um mit geringem Aufwand möglichst weitgehende Variationen erfassen zu können.

X

Normalfall

f) Variation der Gliedzahl von Strukturen:
Ein besonders häufiger Fall ist der, dass lediglich die Gliedzahl der Strukturen der Ausgangswerte variiert wird. Derartige Rechenpläne unterscheiden sich dann durch verschieden häufige Wiederholungen analoger Teile.
Der einfachste Fall ist der einer Angabe der Form S1.n oder einer Liste n×σ .
Die Darstellung solcher Rechenpläne erfolgt mit Hilfe von "Wiederholungsplänen". Diese werden im Abschnitt 6 besonders dargestellt. (S. S. 21).

g) Allgemeines über Variation der Rechenpläne:
In den besprochenen Fällen werden Rechenpläne durch einfaches Einsetzen von variablen Zeichen variiert. Es sind jedoch Variationen wesentlich komplizierterer Art möglich.
Z.B. muss im Rechenplan P9.18 (Quadratwurzelziehen, siehe Zahlenrechnung S.) vor der eigentlichen Rechnung die Stellenzahl des Resultats auf Grund einer Formel errechnet werden.
Diese Art Rechenpläne leiten zu den freien Rechenplänen über, wobei die Grenze sich daraus ergibt, welche Variablen man als Planvariablen und welche als eigentliche Variablen ansehen will.

5) Freie Rechenpläne:

Bei den freien Rechenplänen beeinflussen die eigentlichen Variablen den Ablauf der Rechnung.
Zunächst können die bei den quasistarren Rechenplänen besprochenen Planvariablen wie variable Operationszeichen, Strukturzeichen usw. Funktionen der eigentlichen Variablen sein. Es kann z.B. die Art der Operation in einer Rechenplangleichung erst errechnet werden. Diese Fälle sind analog den unter 4) besprochenen.
Darüber hinaus können wir folgende typischen Fälle unterscheiden:

a) Variables Schlusszeichen:
Es gibt Rechenpläne, welche abgebrochen werden können, bevor sie völlig durchgerechnet sind, da das Resultat sich bereits aus einem Teil des Planes ergibt, oder es sich herausstellt, dass eine weitere Rechnung sinnlos ist. Z.B. kann eine mehrgliedrige Disjunktion abgebrochen werden, sobald ein Glied positib ist und eine mehrgliedrige Konjunktion, sobald ein Glied negativ ist.

Es wird zu diesem Zweck ein variables Schlusszeichen Fin eingeführt. Es wird auf die rechte Seite einer Rechenplangleichung gesetzt, wobei der Ausdruck links des $\Rightarrow$ Zeichens das Kriterium dafür darstellt, dass die Rechnung abgebrochen werden kann.

Beispiel: $V_0 \vee V_1 \vee V_2 \Rightarrow R_0$

$$V_0 \Rightarrow Z_0 \quad | \quad Z_0 \Rightarrow \text{Fin}$$
$$Z_0 \vee V_1 \Rightarrow Z_0 \quad | \quad Z_0 \Rightarrow \text{Fin}$$
$$Z_0 \vee V_2 \Rightarrow R_0$$

Diese Art der Darstellung hat allerdings erst dann Sinn, wenn Wiederholungspläne angewandt werden, oder wenn die einzelnen Konjunktions- bzw. Disjunktionsglieder sehr kompliziert aufgebaut sind.
Im allgemeinen erstreckt sich die Reichweite des Fin - Zeichens über den ganzen Plan. Es kann jedoch beabsichtigt sein, nur einen Teil des Planes zu überschlagen, während die folgenden Teile durchgerechnet werden sollen. In diesem Falle müssen mehrere Rechenplangleichungen zu einer Gruppe bzw. zu einem Teilplan zusammengefasst werden. Ein Fin - Zeichen innerhalb dieser Klammer erstreckt sich dann nur auf diesen Planteil. Enthalten Unterpläne Fin - Ansätze, so gelten diese selbstverständlich nur für diese.
Solche Planteile können mehrfach ineinander verschachtelt sein.
Es kann dann durch Fin^1, Fin^2 usw. angedeutet werden, ob das Schlusszeichen nur einfach oder zugleich für die nächst höhere Klammer gilt. Es spielt dies insbesondere bei Wiederholungsplänen eine Rolle.

das Zeichen der Sicher(?)
Als abgeschlossener Planteil gilt in diesem Sinne auch ein auf ein $\overset{\cdot}{\rightarrow}$ ~~Zeichen~~ folgender Ausdruck (Vergl. 5b.).

b) Bedingte Planteile:

Die Durchrechnung von Planteilen kann von Bedingungen abhängig gemacht werden, die durch einen von den Variablen abhängigen Ausdruck gegeben sind.
Beide Ausdrücke, die Bedingung und der bedingte Planteil werden durch das Zeichen ($\dot{\rightarrow}$) getrennt. Durch den Punkt ist angedeutet, dass es sich nicht um eine Rechenoperation handelt. [Implikation]
Ein einfaches Beispiel ist die Bildung von Maj (V_0, V_1).
(Der grössere der beiden Werte V_0 und V_1 Siehe Zahlenrechnung S).

$$\begin{array}{l|lcl}
 & Maj\,(V,\ V) & \Rightarrow & R \\
V & \quad\ \ 0\quad\ 1 & & 0 \\
A & \quad\ \ 8\quad\ 8 & & 8
\end{array}$$

IF

$$\begin{array}{l}
V_0 \geq V_1 \ \dot{\rightarrow}\ (V_0 \Rightarrow R_0)
\end{array}$$

THEN

$$\begin{array}{l}
\overline{V_0 \geq V_1} \ \dot{\rightarrow}\ (V_1 \Rightarrow R_0)
\end{array}$$

~~ELSE~~

Es läuft in diesem Falle entweder der eine oder der andere Planteil ab.
Derartige bedingte Planteile können mehrfach ineinander verschachtelt sein. Durch Klammern müssen dann die Bereiche der einzelnen $\dot{\rightarrow}$ Zeichen abgegrenzt sein. (Vergl. z.B. "Operationen mit algebr. Ausdrücken" S.).

Dynamische Indexkodierung

c) Variable Indizes:
Sämtliche Indizes eines der Zeichen V, Z, R usw. können von den Variablen abhängig gemacht werden. Z.B. hat in dem Ausdruck

$$\begin{array}{l|l}
 & V \\
V & 0 \\
K & \varkappa \\
S & 1.n
\end{array}$$

der Komponentenindex die Form einer Variablen Diese gibt an, welche Komponente von V der Rechnung zugrunde gelegt werden soll.

Diese Variablen können nun wieder zusammengesetzter Art sein, bzw. selber durch Indizes ergänzt sein. Um diese dann ordnungsgemäss in der Zeilendarstellung plazieren zu können, werden sie auf die Hauptzeile gesetzt und durch Linienzüge mit der Stelle verbunden, an der sie eigentlich stehen sollen:

$$\begin{array}{l|ll}
 & V & Z \\
V & 0 & 1 \\
K & & \\
A & 1.n & 9
\end{array}$$

In diesem Ausdruck gibt Z_1 die Komponente von V_0 an.

Die Strukturangabe unter V_0 bezieht sich dabei auf die Komponente von V_0, die unter Z_1 auf Z_1.

Ein typischer Anwendungsfall ist folgender:
Eine Funktion sei durch eine Liste dargestellt, bei der jedem Wert einer Variablen ein bestimmter Funktionswert zugeordnet ist. Wir erhalten so eine Paarliste. Bestehen nun die Variablen aus den ganzen Zahlen von 0 bis n-1, so stimmen sie mit den Indizes der Paarliste überein. Wir brauchen dann nur die Liste der Funktionswerte. Ist diese gleich V_0 und ist V_1 die Variable so ist der zugehörige Funktionswert:

Struktur $n \times \sigma$)

[S1 $n \times \sigma$]

$$\begin{array}{l|ll} & V & V \\ V & 0 & 1 \\ K & & \\ S & \cancel{n \times \sigma}\ \sigma & 1.n \end{array}$$

(Vergleiche Schachtheorie S. PΔ.62).
Es braucht jedoch nicht der Gesamtindex variiert zu werden. Sind z.B. die Funktionswerte im obigen Beispiel wiederum in sich gegliedert und wird die Komponente 1 des Funktionswertes gesucht, so können wir diesen Wert zunächst unter Zuhilfenahme eines Zwischenwertes Z_0 wie folgt ansetzen:

$$\begin{array}{l|llll} & V & V & \Rightarrow & Z \\ V & 0 & 1 & & 0 \\ K & & & & \\ S & (\sigma,\tau) & 1.n & & (\sigma,\tau) \end{array} \qquad \begin{array}{l|lll} & Z & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 0 \\ K & 1 & & \\ S & \tau & & \tau \end{array}$$

Diese beiden Ansätze können nun wie folgt zusammengefasst werden:

$$\cancel{\begin{array}{l|llll} & V & V.1 & \Rightarrow & R \\ V & 0 & 1 & & 0 \\ K & & & & \\ S & \tau & 1.n & & \tau \end{array}} \qquad \begin{array}{l|llll} & V & V.1 & \Rightarrow & R \\ V & 0 & 1 & & 0 \\ K & & & & \\ S & \tau & 1.n & & \tau \end{array}$$

Der Gesamtausdruck $\underset{1}{V.1}$ ist jetzt an die Stelle des Komponentenindex von V_0 gesetzt zu denken. Durch den Punkt werden wieder die verschiedenen Stufen der Komponenten gekennzeichnet. (Vergl. S.4).
Ein anderer typischer Fall ist der der Änderung eines Gliedes in einer Liste.
In der Liste V_0 soll das Glied mit dem Index V_1 durch das Glied V_2 ersetzt werden:

$$\begin{array}{l|llllll} & R(V & , V & , V) & \Rightarrow & R \\ V & 0 & 1 & 2 & & 0 \\ S & m\times\sigma & 1.n & \sigma & & m\times\sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{l|lll} & V & \Rightarrow & Z \\ V & 0 & & 0 \\ K & & & \\ S & m\times\sigma & & m\times\sigma \end{array} \quad \begin{array}{|llll} V & \Rightarrow & Z & V \\ 2 & & 0 & 1 \\ & & & \\ \sigma & & \sigma & 1.n \end{array} \quad \begin{array}{|lll} Z & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ & & \\ m\times\sigma & & m\times\sigma \end{array}$$

Die Bildung von R_0 erfolgt hierbei über einen Zwischenwert Z_0, welcher im Lauf der Rechnung veränderlich ist. (Siehe Regel über das Ergibtzeichen S.9). Es ändert sich allerdings nur die Komponente V1 von Z_0.

(Beispiel siehe Schachtheorie S. PΔ136).

Die Variation des Index kann auch mehrmals hintereinander vorgenommen werden. (Vergl. Schachtheorie S. P∆ 202).
Dieselbe Variation, die wir mit dem Komponentenindex vorgenommen haben, können wir nun auch mit dem Variablenindex vornehmen. Der Fall ist analog.
Bei der Variation des Strukturindex haben wir den bereits unter 4 e, f, besprochenen Fall, dass die Strukturzeichen von den eigentlichen Variablen selbst abhängen. Dies kann sich z.B. ~~sowohl~~ auf die grundsätzliche Art entsprechend 4 f beziehen. (Vergl. Zahlenrechnung S. P9.72)

d) Angaben variablen Umfangs:
Diese spielen insbesondere im Listenkalkül eine Rolle (s. Allgemeine Pläne S. Kap.2). Soll z.B. aus der Liste V_0 ein Listenauszug R_0 gemacht werden, der nur die Glieder von V_0 enthält, auf die ein bestimmtes Kriterium zutrifft, so ist der Umfang dieser Liste eine Funktion von V_0 selbst und nicht nur des Umfangs von V_0. (Wäre nur letzteres der Fall, so würde es sich um einen quasistarren Rechenplan handeln).
Bei solchen Rechenplänen sind also die Strukturen Funktionen der eigentlichen Variablen und müssen im Zusammenhang mit diesen jedesmal bestimmt werden. (Im Gegensatz zu den quasistarren Rechenplänen, bei denen diese Bestimmung unabhängig von den eigentlichen Variablen lediglich als Funktion von deren Struktur erfolgt).
Es ist jedoch dabei nicht nötig, dass der Umfang einer Liste stets durch die Strukturangabe $n \times \sigma$ gegeben ist. Es sind vielmehr noch andere Kennzeichnungen des Umfangs möglich, von denen zwei besonders charakteristisch sind:

α) Die Kennzeichnung von Mengen durch Zusatzangaben. Haben wir z.B. eine umfangreiche Liste V_0, so kann eine Teilliste von ihr durch zusätzliche Angaben (entsprechend dem "Ankreuzen") markiert werden. Zum Listenauszug gehören dann nur die markierten Glieder.

β) Es kann durch Anfangs- und Schlussglieder der Beginn und das Ende einer Angabe variablen Umfangs gekennzeichnet werden. Die Anfangs- und Schlusszeichen können aus den "Zwischenraumzeichen" bestehen. Man bedenke dabei, dass bei allen mechanischen Verschlüsselungen von Zeichen auch dem Zwischenraum, obgleich ihm in der Schreibform kein eigentliches Zeichen entspricht, eine bestimmte Kombination (z.B. O) zugeordnet sein muss. (So entspricht auf der Schreibmaschine dem Zwischenraum eine Taste, wie allen anderen Zeichen).
Je ~~nach~~ der Darstellungsart können Rechenpläne, die an sich der gleichen Aufgabe dienen, verschieden aufgebaut sein.
Mit Hilfe einiger Massnahmen, wie der Wiederholungspläne und der μ-Funktion (s.S. 31) gelingt es jedoch, diese Unterschiede weitgehend auszuschalten und die Rechenpläne auf das eigentlich Wesentliche zu beschränken. (Vergl hierzu auch Listenkalkül S. ~).

e) Errechnung von Rechenplänen:

Der Fall, dass den Variablen eines Rechenplanes verschiedene Variationsstufen zugeordnet werden können und die Bestimmung des Rechenplanes unabhängig von den eigentlichen Variablen nur mit Hilfe der Planvariablen durchgeführt werden kann, wurde bereits unter 4). besprochen.

Im allgemeinen kann dieser Prozess von den eigentlichen Variablen abhängen.

Sind u_0, u_1, ... u_n' die Planvariablen eines quasistarren Rechenplanes (welche hier beliebige Bedeutung, also Operationsvariablen, Strukturvariablen usw. haben können), so lautet der Ansatz für die Berechnung eines quasistarren Rechenplanes

$$F\,(u_0,\ u_1,\ u_2\ \ldots)\ \Rightarrow\ P$$

P besteht dann aus einer Folge von Rechenplangleichungen in welchen die eigentlichen Resultatwerte R_0 als Funktion der eigentlichen Variablen V_0, V_1 ... bestimmt werden.

Der Gesamtplan sieht dann wie folgt aus:

$$F\,(u_0,\ u_1\ \ldots.\ u_2)\ \Rightarrow\ P$$

$$P$$

d.h. im Anschluss an die Errechnung des Rechenplanes läuft dieser selbst ab.

Dabei können durch den Ansatz F ( ) natürlich auch nur Teile von P bestimmt sein, bzw. Planvariablen von P.

So hat der Rechenplan für $\sqrt[2]{\ }$ folgende Form:

(S. Zahlenrechnung S.).

Randauszug:

$$\begin{array}{c|cccc} & R & (\nu) & \Rightarrow & R \\ V & & 0 & & 0 \\ S & & 1.n & & 1.m \end{array}$$

Randauszug mit Planvariablen: $n = N\,(\nu_0)$, $m = N\,(R_0)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & R\,(& n\ , & \nu) & \Rightarrow & (m\ , & R\,) \\ V & & & 0 & & & 0 \\ S & & & 1.n & & & 1.m \end{array}$$

Rechenplan:

$$F\,(\,n\,)\ \Rightarrow\ m$$
$$(\,R\,(\,m\,,\,n\,)\,)\,(\nu_0)\ \Rightarrow\ R_0$$

Es wird zuerst m als Funktion von n bestimmt, daraufhin kann R_0 aus einem quasistarren Rechenplan bestimmt werden.

Die verschiedenen Möglichkeiten, die sich bei der Berechnung von Rechenplänen ergeben werden an späterer Stelle besprochen.

6) Wiederholungspläne:

Unter Wiederholungsplänen werden solche verstanden, die mehrmals hintereinander ablaufen, wobei im Sonderfall auch die Zahl der Abläufe Null oder Eins sein kann.
Im allgemeinen ist eine Rechenplangleichung bzw. eine Folge von solchen erledigt, sobald die darin gegebenen Vorschriften ausgeführt sind. Es besteht eine nicht ausgesprochene Vorschrift, nach Abschluss einer Rechenplangleichung zur nächsten überzugehen. Dies bedingt die Gleichungen in eine Folge, die durch die Schreibform von selbst gegeben ist.

Bei Wiederholungsplänen gilt nun die Vorschrift, nach ihrer Durchrechnung zum nächsten Planteil überzugehen, nicht ohne weiteres. Solange nicht das Schlusszeichen für den Gesamtprozess gegeben wird, wird der als Wiederholungsplan gekennzeichnete Planteil immer wieder von Neuem durchgerechnet.
Dies hat natürlich nur dann Sinn, wenn die im Wiederholungsteil enthaltenen Vorschriften laufenden Änderungen unterworfen sind, die sich durch die Wiederholungen selbst ergeben. Am häufigsten bestehen diese Variationen darin, dass der Wertevorrat einer Liste systematisch zur Berechnung herangezogen wird. Dies wird dadurch bewirkt, dass von der Komponente i einer Angabe zur Komponente i + 1 übergegangen wird. Wiederholungspläne sind also im allgemeinen durch gewisse Laufwerte i, ε gekennzeichnet, welche die Variationen des Planes bei den aufeinanderfolgenden Rechnungen bewirken. Diese Werte werden als Variationswerte des Wiederholungsplanes bezeichnet.
Neben dieser Variationsvorschrift muss ein Wiederholungsplan ferner noch die Vorschriftenthalten, wann die Wiederholung abzubrechen ist. Dies kann z.B. nach einer vorgeschriebenen Zahl von Wiederholungen, oder nach Erschöpfung eines Werte-Vorrats der Fall sein. Für den Abbruch der Wiederholungen verwenden wir das Fin - Zeichen. Jedoch muss dies vom 2. Grade, also Fin^2 sein; (vergl. S. 16) denn der Gesamtprozess setzt sich ja aus einer Folge mehrerer gleicher Planteile zusammen. Das einfache Fin - Zeichen innerhalb eines Wiederholungsplanes bedeutet lediglich die Beendigung der gerade laufenden Variation, ohne dass der Gesamtprozess abgebrochen wird.
Wiederholungspläne werden eingeklammert und durch ein vorgesetztes W als solche gekennzeichnet.
Ein Wiederholungsplan, kurz W - Plan, hat dann allgemein die Form:

$$W \begin{bmatrix} F \rightarrow P \\ \bar{F} \rightarrow \text{Fin}^2 \end{bmatrix}$$

W.i.e.

Hierin bedeutet F einen aussagenlogischen Ausdruck, der eine Funktion der Variationsgrössen ist und ausserdem eine Funktion der Variablen bzw. Zwischenwerte des Rechenplanes sein kann.
P ist der eigentliche Wiederholungsplan. Er enthält die zu wiederholende Rechenvorschrift einschliesslich der Variationsvorschrift.
Im Falle F wird P durchgerechnet, im Falle $\bar{F}$ wird das Schlusszeichen für den Gesamtprozess gegeben.
Wir können nun zur Vermeidung von Schreibarbeit den Ansatz $\bar{F} \rightarrow \text{Fin}^2$ fortlassen und verabreden, dass er bei einem W - Plan stets als Ergänzung angenommen werden muss.

Ein W - Plan erhält dann allgemein die Form:

$$W \left[F \to P \right]$$

While

Hierin kann F nun noch unterteilt sein. Wir erhalten dann einen Ausdruck der Form:

$$W \left[\begin{array}{l} F_0 \to P_0 \\ F_1 \to P_1 \\ \vdots \\ F_n \to P_n \end{array} \right]$$

In einem solchen Ansatz ist folgender Ansatz für das Schlusszeichen zu ergänzen: $\overline{F_0} \wedge \overline{F_1} \ldots \wedge \overline{F_n} \Rightarrow Fin^2$

d.h. wenn für keinen der Teilpläne die Bedingung zur Durchrechnung gegeben ist, wird der Prozess abgebrochen.

Ausser dieser allgemeinen W - Vorschrift werden noch einige spezielle, die besonders häufig vorkommen, eingeführt. ~~(S.S.)~~.

Wir betrachten zunächst die Fälle, in denen ein Laufwert i oder ε systematisch eine Zahlenreihe durchläuft.

W0(n) Wo(n) ~~W0~~ n - malige Wiederholung eines vom Variationswert unabhängigen Planes.

Beispiel: Potenzierung: $v_0^{v_1} \Rightarrow R_0$

$$\begin{array}{l|cccc} & R\,(& v, & v\,) & \Rightarrow R \\ V & & 0 & 1 & 0 \\ A & & 8 & 9 & 8 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} A\,8 = \text{Zahl allgemein,} \\ A\,9 = \text{pos. ganze Zahl} \end{array} \right]$$

$$1 \Rightarrow \underset{0}{Z} \;\Big|\; \underset{1}{W0(v)} \left[\underset{0}{Z} \times \underset{0}{v} \Rightarrow \underset{0}{Z} \right] \;\Big|\; \underset{0}{Z} \Rightarrow \underset{0}{R},$$

W1(n)

Im Fall $\underset{1}{v} = 0$ läuft der W - Plan überhaupt nicht ab. Es ergibt sich Ro = 1. Im Falle $\underset{1}{v} = 1$ läuft der W - Plan einmal durch. Es ist Ro = $\underset{0}{v}$. Usw.

Die Vorschrift W1 gilt für den Fall, dass der Plan einen Variationswert hat, der systematisch die Reihe von 0 bis n - 1 durchläuft.

Z.B. wenn mit sämtlichen Gliedern einer Angabe variablen Umfangs eine Operation vorgenommen werden soll.

Beispiel: Generalnegation (S. allgemeine Pläne S.).

Negation sämtlicher Glieder einer Folge von J.N.-Werten.

$$\begin{array}{l|ccc} & R\,(v) & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 0 \\ S & 1.n & & 1.n \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & W1\,(n) \left[\begin{array}{ccc} \overline{v} & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i \\ 0 & & 0 \end{array} \right] \\ V & \\ K & \\ S & \end{array}$$

i = 0 ≦ i < n

$$W_0(n)[P] \equiv 0 \Rightarrow \varepsilon \mid W[\varepsilon < n \rightarrow [P \mid \varepsilon + 1 \Rightarrow \varepsilon]]$$

$$W1(n)[P(i)] \equiv 0 \Rightarrow i \mid W[i < n \rightarrow [P(i) \mid i + 1 \Rightarrow i]]$$

$$W2(n)[P(i)] \equiv n-1 \Rightarrow i \mid W[i \geq 0 \rightarrow [P(i) \mid i - 1 \Rightarrow i]]$$

$$W3(n,m)[P(i)] \; (n \leq m) \equiv n \Rightarrow i \mid W[i < m \rightarrow [P(i) \mid i + 1 \Rightarrow i]]$$

$$W4(n,m)[P(i)] \; (n \geq m) \equiv n \Rightarrow i \mid W[i > m \rightarrow [P(i) \mid i - 1 \Rightarrow i]]$$

$$W5(n,m)[P(i)] \equiv n \Rightarrow i \mid W\left[i \neq m \rightarrow \left[\begin{array}{l} P(i) \\ m > n \rightarrow (i+1 \Rightarrow i) \\ m < n \rightarrow (i-1 \Rightarrow i) \end{array}\right]\right]$$

E1

~~W6 s.S.~~

Im Algol Beginn

W 2 entspricht W 1 nur mit dem Unterschied, dass die Reihe der i - Werte von n - 1 abwärts bis 0 läuft.
Diese W - Vorschrift spielt z.B. eine Rolle bei der Bearbeitung von algebraischen Ausdrücken, die durch Zeichenfolgen dargestellt sind. Hier muss oft das Verfahren des "Rückwärtsdurchlaufs" angewandt werden. ~~Vergl. dort S.~~
Die Begrenzung von W 1 und W 2 ist so gewählt, dass für n die Gliedzahl einer in P vorkommenden zusammengesetzten Angabe eingesetzt werden kann, wobei die Variation über sämtliche möglichen Indizes 0 bis n - 1 läuft. Handelt es sich z.B. bei der Generalnegation bei V_0 um eine Angabe von variabler Struktur, so lässt sich die Formel auch wie folgt schreiben:

$$W1(N(\underset{0}{v})) \left[\begin{array}{lcl} \overline{v} & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i \end{array}\right]$$

W3(n,m) W5(n,m)
~~W 3~~ bis ~~W 5~~ entsprechen Fällen, in welchen die Variation von n einschliesslich bis m ausschliesslich läuft. Und zwar beginnt sie stets bei n. W 3 gilt für den Fall $m \geq n$, W 4 für den Fall $m \leq n$, und W 5 allgemein.

W - Pläne können auch zur Bildung von Wertefolgen benutzt werden. So ergibt sich z.B. die Reihe der Zahlen 0 bis n - 1 aus folgender Anweisung:

$$\begin{array}{l|c|c} & 0 \Rightarrow R & W1(n) \left[\begin{array}{lcl} R + 1 & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i+1 \end{array}\right] \\ V & 0 & \\ K & 0 & \end{array}$$

E2

W - Pläne können mehrfach ineinander verschachtelt sein. Die Zuordnung der W - Zeichen und Variationsgrössen muss dann durch Nummerierung gekennzeichnet sein. Beispiel P 3.3 S 31
Untersuchung einer Liste auf sich wiederholende Glieder. Es muss jedes Glied mit jedem verglichen werden:

$$\begin{array}{l|l} & R(v) \Rightarrow R \\ V & \;\; 0 \qquad\; 0 \\ S & \;\; n \times \sigma \quad 0 \end{array}$$

$$+ \Rightarrow \underset{0}{Z}$$

E3

$$
\begin{array}{l|l}
 & W1(n)\ \Big[W3(i+1,\,n)\ \big[V \quad i \neq V \quad i \;\wedge\; Z \Rrightarrow Z \big] \Big] \\
V & \;\;0 \qquad\quad\;\; 1 \;\;\; 0 \qquad\qquad\;\; 0 \;\; 0 \quad\;\; 0 \;\; 1 \qquad 0 \qquad\; 0 \\
K & \\
S & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \sigma \qquad\;\; \sigma \qquad\quad\; 0 \qquad\; 0
\end{array}
\qquad E4
$$

$$
\begin{array}{l}
Z \Rrightarrow R \\
0 \qquad 0
\end{array}
$$

Der Zwischenwert Z_0 dient der laufenden Bildung der Konjunktion aller Einzelbedingungen.
Die erste W - Vorschrift hat die Bezeichnung $\underset{0}{W1(n)}$.
Dabei bezieht sich die 1 in der Hauptzeile auf die Art der W - Vorschrift entsprechend Seite 23. Die 0 in der V - Zeile bezieht sich auf die zugehörigen Indizes, welche entsprechend mit i_0 bezeichnet werden.
Die erste W - Vorschrift läuft von 0 bis n - 1, also über den ganzen Bereich von V_0.
Die zweite W - Vorschrift ist von der Art W 2 mit den zugeordneten Indizes i_1.
Sie läuft aber jeweils nur von $i_0 + 1$ bis n - 1.
D.h. ihre untere Grenze ist eine Funktion der Variationsgrösse i_0 der ersten W - Vorschrift.
Es wird jeweils immer ein Glied von V_0 mit allen folgenden verglichen. Dadurch werden Doppeloperationen und Vergleiche eines Wertes mit sich selbst vermieden.
Mit Berücksichtigung derartiger Nummerierungen der W - Pläne und zugehörigen Indizes lautet die allgemeine Vorschrift für W 1 wie folgt:

$$
\begin{array}{l|l}
 & W1(n)\ \big[P(i) \big] \equiv o = \hat{i} \;\Big|\; W \Big[i < n \rightarrow \big[P(i) \;\big|\; i + 1 \Rrightarrow i \big] \Big] \\
V & \;\;\; j \qquad\qquad\quad j \qquad\qquad\quad\; j \qquad\quad\;\; j \qquad\qquad\quad\; j \qquad\;\; j \qquad\;\; j
\end{array}
$$

Entsprechendes gilt für die anderen Vorschriften.

W6 (m/m)

Eine besonders vorteilhafte Form eines W - Planes ist noch folgende:
Aus einem Wertevorrat Z_0 soll der erste Wert herausgegriffen werden, hierauf soll Z_0 neu gebildet werden, indem zunächst einmal das gerade herausgegriffene erste Glied fortgelassen wird, und zum andern die Liste Z_0 durch weitere Operationen eingeschränkt bzw. ergänzt oder auch ganz neu gebildet wird.
Wir setzen hierfür allgemein an:

$$
\begin{array}{l|l}
 & W6\ \Big[Z \Rrightarrow Z \;\Big|\; P(Z) \;\Big|\; R(Z,\square) \Rrightarrow Z \Big] \\
V & \quad\;\;\; 0 \quad\;\; 1 \qquad\;\; 1 \qquad\qquad\;\; 0 \qquad\quad\;\; 0 \\
K & \quad\;\;\; 0
\end{array}
\qquad \in \quad E5
$$

Hierfür gilt folgender Rechenplan: x)

$$
\begin{array}{l|l}
 & W \Bigg[N(Z) \neq 0 \rightarrow \begin{bmatrix} Z \Rrightarrow Z \;\Big|\; \hat{x}\,(x \in Z \wedge I(x) \neq 0 \Rrightarrow Z) \\ P(Z) \;\Big|\; R(Z,\square) \Rrightarrow Z \end{bmatrix} \Bigg] \\
V & \qquad\; 0 \qquad\qquad\;\; 0 \quad 1 \qquad\qquad\quad\;\; 0 \qquad\qquad\qquad\;\; 0 \\
K & \qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}
$$

x) $\in$ siehe Seite

E6

Der W - Plan besteht aus drei Teilen:

a) Die Bildung von Z_1 und Entfernen dieses Gliedes aus Z_0.

b) Der mit Z_1 durchzurechnende Plan.

c) Die Neubildung von Z_0 als Funktion des bisherigen Z_0 und anderer Werte.

Der Plan wird solange wiederholt, wie die Liste Z_0 nicht leer ist.

(Beispiel P 3 . 9, Kap. 2 S.)

7) Operationen des Prädikatenkalküls:

In der Logistik spielen bestimmte Operationssymbole eine wichtige Rolle. Es sind dies die "All-" und "Existenz-" Operatoren, ferner die Zeichen für "Derjenige, welcher", "Diejenigen" und "Das nächste".

Es soll nun gezeigt werden, welche Form diese Ausdrücke im Plankalkül annehmen und welche Bedeutung ihnen zukommt.

a) <u>Die All- und Existenzoperatoren:</u> (x) R (x)

Der Ausdruck (x) R (x) bedeutet im Prädikatenkalkül, dass das Prädikat R auf alle x zutrifft. Unter "alle x" wird die Menge derjenigen Elemente verstanden, deren Einsetzung in das Prädikat R sinnvoll ist. Diese Definition kann ohne weiteres im Plankalkül übernommen werden. Unter der Menge der zur Einsetzung an Stelle von x in Frage kommenden Werte verstehen wir die Menge der Werte, die durch das Angabenart- bzw. Strukturzeichen von x gekennzeichnet sind.

Haben wir z.B. den Ausdruck:

$$\begin{array}{c|l} & (x)\ R\ (x) \\ V & \\ S & 1.n \qquad 1.n \end{array}$$

so geht aus diesem hervor, dass für x sämtliche Variationen der Angabenstruktur 1.n eingesetzt werden können.

In dem Ausdruck

$$\begin{array}{c|l} & (x)\ R\ (x) \\ V & \\ A & 9.10 \end{array}$$

kommen nur die positiven ganzen Dezimalzahlen zur Einsetzung in Frage. (S. Definition von A9.10, Zahlenrechnung S.).
Allgemein gilt folgendes: Liegt eine Beschränkungsformel vor (S.S. 3), so kommen für die Einsetzung nur die Variationen der Struktur in Frage, für welche die Beschränkungsformel gilt. Im Falle A9.10 ist diese Beschränkung in der Angabe A9.10 mit enthalten (Vergl. S.3/4).

Um den Rechenplan für don Alloperator anzusetzen, brauchen wir also zunächst einen Ausdruck dafür, dass ein Glied $x^{\prime}$ die Eigenschaft hat, einem bestimmten Angabentyp anzugehören.
Wir schreiben dafür:

$$\overset{A(x')}{A\ (x')} = \alpha \quad \text{bzw.} \quad \overset{A(x')}{A\ (x')} = \sigma$$

Hierbei sind α und σ beliebige Angabenart- bzw. Strukturzeichen.
Z.B. A9.2, S1.n.
Ferner brauchen wir noch einen Ausdruck für die Liste sämtlicher Angaben, welche einer solchen Bedingung genügen. Wir nennen diese Liste

$$\overset{L(\alpha)}{L\ (\alpha)} \quad \text{bzw.} \quad \overset{L(\sigma)}{L\ (\sigma)}$$

X

(Liste der durch α bzw. σ gegebenen Werte).
Im Falle σ = S0 besteht L (σ) aus den Werten - und +.
Im Falle σ = S1.n haben wir die Folge der ganzen Zahlen von 0 bis n - 1. Den Rechenplan zur Bildung dieser Werte haben wir bereits auf Seite 23 aufgestellt.
Ebenso ist es möglich, durch systematische Variation der Komponenten einer beliebig zusammengesetzten Struktur σ das Bildungsgesetz für L (σ) aufzustellen. Bei Angaben-beschränkungen kann diese Liste leicht auf die durch die Beschränkungsformel gekennzeichneten Werte eingeschränkt werden.

L(σ).

Es liesse sich ein allgemeiner Rechenplan zur Bildung von L (σ) für beliebige Angabenarten ansetzen. Es wird hiervon jedoch aus zwei Gründen abgesehen:

α) Dieser Rechenplan wäre eine Funktion der Strukturangabe einer Strukturangabe, also gewissermassen einer Variablen 3. Stufe. (Vergl. S. 20). Dadurch wird das Problem kompliziert. 1)

β) Es besteht im allgemeinen nicht die Notwendigkeit, die Liste sämtlicher möglichen Fälle zu entwickeln.

Wird also ausnahmsweise die Entwicklung der Liste L (α) für ein bestimmtes α gebraucht, so muss der Rechenplan zur Bildung von L (α) besonders angesetzt werden.
Somit können wir allgemein für den Ausdruck

$$(x')\ R\,\square\,(x') \Rrightarrow R$$

$$(x')\,R\square(x') \Rrightarrow R$$

den Rechenplan ansetzen:

$$\begin{array}{c|cccc|cc|ccc|cccccc|ccc}
 & L\,(A\,(& x' &))\Rrightarrow & Z & +\Rrightarrow & Z & W1\,(N\,(& Z &)) & [R\square(& Z &)\wedge & Z & \Rrightarrow & Z] & Z & \Rrightarrow & R \\
V & & & & 0 & & 1 & & 0 & & & 0 & & 1 & & 1 & 1 & & 0 \\
K & & & & & & & & & & & i & & & & & & & \\
S & & \sigma & & \square\times\sigma & & 0 & & & & 0 & \sigma & & 0 & & 0 & 0 & & 0
\end{array}$$

Dieselben Überlegungen gelten für den Existenz - Operator:

$(Ex)\ R\,\square\,(x) = R$ (Es gibt mindestens ein Element mit der Eigenschaft R $\square$).

Hierfür können wir folgenden Rechenplan ansetzen:

$$\begin{array}{c|cc|c|c|cccc|cc}
 & L(A(x)) & \Rightarrow Z & - \Rightarrow Z & W1(N(Z)) & [R\square & (Z) & \vee\; Z & \Rightarrow Z] & Z & \Rightarrow R \\
V & & 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
K & & & & & & i & & & & \\
S & \sigma & \square\times\sigma & 0 & & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Nun ist es in den praktisch vorkommenden Fällen keineswegs nötig, die Variation von x über den gesamten Bereich der Struktur durchzuführen. Vielmehr haben die Ausdrücke meistens die Form: "Alle Glieder der Liste V_0 haben die Eigenschaft $R\square$", bzw. "Es gibt in der Liste V_0 ein Glied mit der Eigenschaft $R\square$". Die folgenden Ausarbeitungen von Rechenplänen geben hierfür zahlreiche Beispiele:

Wir formulieren die Sätze zunächst wie folgt:

"Es gibt für alle x: Gehört x der Liste V_0 an, so hat es auch die Eigenschaft $R\square$".
"Es gibt ein x für welches gilt: Es gehört der Liste V_0 an und es hat die Eigenschaft $R\square$".

Wir brauchen nun noch einen symbolischen Ausdruck dafür, dass x der Liste V_0 angehört. In Anlehnung an die Mengenlehre schreiben wir:

$\in$

$$\begin{array}{c|cc}
 & x \in & v \\
V & & 0 \\
S & \sigma & \square\times\sigma
\end{array}$$

gelesen: "x ist Glied von v".

Dabei soll das Zeichen $\in$ stärker binden als alle anderen Zeichen. Der entsprechende Rechenplan lautet:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & R(& V, & V) \Rightarrow & R \\
V & & 0 & 1 & 0 \\
S & & \sigma & n\times\sigma & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & R = & V \in & V \\
 & 0 & 0 & 1
\end{array} \quad 2)$$

$$\begin{array}{c|c|c|cccc|cc}
 & - \Rightarrow Z & W1(n) & [V = & V \vee & Z \Rightarrow & Z] & Z \Rightarrow & R \\
V & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K & & & i & & & & & \\
S & 0 & & \sigma & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Wir können jetzt die Ausdrücke für die All- und Existenzoperatoren wie folgt schreiben:

$$(x)\,(x \in V_0 \rightarrow R\square(x))$$
$$(Ex)\,(x \in V_0 \wedge R\square(x))$$

E
10

Für diese Ausdrücke braucht jetzt nicht mehr die Variation über den ganzen Bereich der Struktur durchgeführt zu werden.
Für den Alloperator gilt folgendes:

Entweder x gehört nicht V_0 an, dann ist die Implikation auf jeden Fall erfüllt ($a \rightarrow b$ äq $\bar{a} \vee b$) $\mp$.
Diese Fälle brauchen also nicht untersucht zu werden. Oder x ist in V_0 enthalten, dann muss $R \square (x)$ erfüllt sein.

Für den Existenz - Operator gilt folgendes:
Entweder x ist nicht Glied von V_0, dann ist der Klammerausdruck auf keinen Fall erfüllt. Oder x ist Glied von V_0, dann muss $R \square (x)$ erfüllt sein.
Es genügt also in jedem Fall, die Variation über die Glieder von V_0 zu erstrecken.

Dementsprechend erhalten wir dann für den Ausdruck:

$$(x)(x \in V_0 \rightarrow R \square (x) \Rightarrow R_0$$

Den Rechenplan:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} V & + \Rightarrow Z_0 & \overrightarrow{W1}\overleftarrow{(N\ (V_0)\ )} & \left[R \square (V_{0,i}) \wedge Z_0 \Rightarrow Z_0 \right] & Z_0 \Rightarrow R_0 \\ K & & & & \end{array}$$

~ ~ 1 2l

In der Logistik gilt der Satz:

$$(x)\ F\ (x) \rightarrow (Ex)\ F(x)$$

Er gilt, da leere Individuenbereiche ausgeschlossen sind.
Bei der Übertragung auf obige Darstellung der Beschränkung des Individuenbereiches auf eine Liste V_0 können wir jedoch diese Implikation nicht ohne weiteres ansetzen.
Es gilt nicht allgemein:

$$\underline{(x)\ (x \in V_0 \rightarrow R \square (x)) \rightarrow (Ex)(\ x \in V_0 \wedge R \square (x))}$$ X E12

Denn die Menge der im V_0 enthaltenen Glieder kann leer sein.
Der entsprechende Ansatz lautet vielmehr:

$$(x)\ (x \in V_0 \rightarrow R \square (x)) \rightarrow (Ex)(\ x \in V_0 \rightarrow R \square (x))$$? E13

bzw.

$$(x)(\ x \in V_0 \wedge R \square (x)) \rightarrow (Ex)(\ x \in V_0 \wedge R \square (x))$$? E14

Diese beiden Ansätze sind allgemein gültig.
Und für den Ausdruck:

$$(Ex)(\ x \in V_0 \wedge R \square (x)) \Rightarrow R_0$$ E15

den Rechenplan:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} V & - \Rightarrow Z_0 & W1(N(V_0)) & \left[R \square (V_{0,i}) \vee Z_0 \Rightarrow Z_0 \right] & Z_0 \Rightarrow R_0 \\ K & & & & \end{array}$$ E16

~ ^ 2l

b) <u>Der Operator "Diejenigen, welche ":</u>

Unter dem Ausdruck
$$\hat{x}\ R\square(x)$$
versteht man in der Logistik die Menge derjenigen Elemente, auf die das Prädikat R □ zutrifft.
Für den allgemeinen Ansatz müssen wir nun wieder x über den gesamten Bereich seiner Struktur variieren. Wir erhalten dann für den Ausdruck
$$\hat{x}\ R\square(x) \Rightarrow \underset{0}{R}$$
folgenden Rechenplan:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & L\,(A(x)) & \Rightarrow & Z & 0 \Rightarrow \varepsilon \\
V & & & 0 & \\
S & \sigma & & \square\times\sigma &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc}
 & W1\ (N(Z)) & \left[\begin{array}{cc} R\square(Z) \to & \left[\begin{array}{cc|c} Z \Rightarrow & R & \varepsilon+1 \Rightarrow \varepsilon \\ 0 & 0 & \\ 1 & \varepsilon & \\ \sigma & \sigma & \end{array}\right] \\ 0 & \\ 1 & \\ \sigma & \end{array}\right] \\
V & 0 & \\
K & & \\
S & \square\times\sigma &
\end{array}$$

Es werden aus der Liste L (A (x)), welche sämtliche Variationen der Struktur σ enthält, die Glieder der Eigenschaft R □ ausgesondert.
Der Hilfswert ε dient der fortlaufenden Nummerierung der Glieder des Ergebnisses.
Nun lauten die praktisch vorkommenden Aufgaben wiederum meistens wie folgt:
"Bilde die Liste derjenigen Glieder der Liste V_0, welche die Eigenschaft R □ haben".

Wir setzen dementsprechend an:
$$\hat{x}\ (x \in \underset{0}{V} \wedge R\square(x))$$
Es gilt jetzt: Ist x nicht Glied von V_0, so trifft der Klammerausdruck auf keinen Fall zu. Ist x Glied von V_0, so muss R □ (x) zutreffen.
Es brauchen also wieder nur die Glieder von V_0 untersucht werden.
Jedoch besteht hier noch eine Schwierigkeit: Treten in der Liste V_0 mehrere gleiche Glieder auf, so dürfen diese trotzdem nur einmal in dem durch obigen Ausdruck gekennzeichneten Auszug enthalten sein.
Es genügt also nicht, systematisch sämtliche Glieder von V_0 auf die Eigenschaft R □ zu untersuchen, sondern es muss bei Zutreffen der Eigenschaft R □ noch untersucht werden, ob das Glied schon in der bereits gebildeten Aufbauliste des Resultats enthalten ist.
Dies erfolgt über einen Hilfswert Z_0, welcher die Aufbauliste von R_0 darstellt, das heisst die Liste der Glieder, welche beim jeweiligen Stand der Untersuchung bereits als zu R_0 gehörig bestimmt worden sind.
Dieser Hilfswert ist zunächst gleich der Nullmenge, welche wir mit Ø bezeichnen wollen.
Wir erhalten dann für den Ausdruck:
$$\hat{x}\ (x \in \underset{0}{V} \wedge R\square(x)) \Rightarrow \underset{0}{R}$$
$$\hat{x}\ (x \in \underset{0}{V} \wedge R\square(x)) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

den Rechenplan:

$$0 \Rrightarrow \varepsilon \;\Big|\; \phi \Rrightarrow \underset{0}{Z}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & W1\,(N(V)) & \Big[\, R\square(V) \wedge & \overline{V \in} & \overline{Z} & \dot{\rightarrow} \Big[V \Rrightarrow & Z & \Big| \; \varepsilon + 1 \Rrightarrow \varepsilon \;\Big]\Big] \\
V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
K & & i & i & & i & \varepsilon & \\
S & \square\times\sigma & \sigma & \sigma & \square\times\sigma & \sigma & \sigma &
\end{array}$$

E 18

$$\begin{array}{c|cc}
 & Z \Rrightarrow & R \\
V & 0 & 0 \\
S & \square\times\sigma & \square\times\sigma
\end{array}$$

Setzen wir an: $\hat{x}\,(x \in V_0)$, so erhalten wir die Liste der Glieder von V_0, wobei jedoch jedes Glied nur einmal aufgeführt ist.

Der Ansatz $\quad V_0 = \hat{x}\,(x \in V_0)$
besagt also, dass V_0 keine doppelten Glieder enthält.

Sehr häufig wird jedoch auch der Listenauszug für die Glieder der Liste V_0 mit der Eigenschaft $R\square$ gebraucht, unter Beibehaltung der mehrfach auftretenden Glieder.
(Aus der Liste der Einzelbefehle eines maschinenfertigen Rechenplanes werden z.B. an das Rechenwerk nur die Operationsbefehle gegeben, diese stellen den Listenauszug mit der Eigenschaft "Rechenoperation" dar).
Wir führen hierfür das Symbol $\hat{\hat{x}}$ ein und erhalten dann für den Ausdruck:

$$\hat{\hat{x}}\,(x \in V_0 \wedge R\square(x)) \Rrightarrow R_0$$

E 19

den Rechenplan:

$$0 \Rrightarrow \varepsilon$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & W1(N(V)) & \Big[\, R\square(V) & \dot{\rightarrow} \Big[V \Rrightarrow & R & \Big| \; \varepsilon + 1 \Rrightarrow \varepsilon \;\Big]\Big] \\
V & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
K & & i & i & \varepsilon &
\end{array}$$

E 20

Es sei noch erwähnt, dass in beiden Fällen ($\hat{x}$, $\hat{\hat{x}}$) die Reihenfolge der Glieder der Liste V_0 entspricht.
Die Operatoren haben hier also eine etwas andere Bedeutung als in der Logistik, wo sie lediglich Mengen bezeichnen. Sie sind hier Ausdrücke für Wertefolgen mit gegebener Anordnung der Glieder.
Es gilt allgemein:

$$\hat{\hat{x}}\,(x \in V_0) = V_0$$

Ein Beispiel möge die Bedeutung von $\hat{x}$ und $\hat{\hat{x}}$ demonstrieren:
Gegeben eine Liste V_0, bestehend aus einer Zahlenreihe.

Ger(x) bedeutet: "*x* ist eine gerade Zahl".

V_0 = (0, 3, 5, 4, 3, 3, 6, 12, 6, 4)

Es gilt dann :

$$\hat{x}\,(x \in V) = (0,\ 3,\ 5,\ 4,\ 6,\ 12,\ )$$
$$\hat{x}\,(x \in V \wedge {}^{0}Ger(x)) = (0,\ 4,\ 6,\ 12)$$
$$\hat{\hat{x}}\,(x \in V_0 \wedge Ger(x)) = (0,\ 4,\ 6,\ 12,\ 6,\ 4)$$

E21

c) Der Operator "Derjenige welcher":

Der Ausdruck $\acute{x}\; R\square(x)$

hat in der Logistik die Bedeutung: "Dasjenige Element, auf welches das Prädikat R $\square$ zutrifft".
Bedingung für die Anwendung dieses ~~Terms~~ Operators ist, dass es genau ein solches Element gibt.
Bei systematischer Variation über den gesamten Bereich der Struktur von x ergibt sich folgender Rechenplan:

$$\overline{L\,(A\,(x\,))} \not\Rightarrow Z_{o}$$

$$\overline{W1\,(N\,(Z_{o}\,))}\ \left[\, R\square\,(Z_{o\,i}\,) \rightarrow \left[\, Z_{o\,i} \not\Rightarrow R_{o} \;\middle|\; \overline{F\,i\,n^{3}} \,\right]\right]$$

E22

Sobald ein Glied der Eigenschaft R $\square$ auftritt, ergibt dies R und es wird das Schlusszeichen für den Gesamtprozess gegeben. Das Schlusszeichen in einem W - Ausdruck ist zunächst von der Form $\boxed{F\,i\,n^2}$, wenn der gesamte W - Prozess abgebrochen werden soll (vergl. S. 16). Da es noch in einem geschlossenen Teilplan hinter dem $\rightarrow$ steht, muss es aber noch um einen Grad auf F i n^3 erhöht werden.

V (Fortsetzung ~~siehe Seite~~ 41)

d) Der Operator "Das nächste ... ":

Der Operator $\mu x\; R\square(x)$

wurde von Hilbert in der Logistik eingeführt. (Hilbert, Bernays "Grundlagen d. Math., 1. Bd. Seite 395). Er bedeutet:
"Das nächste Glied der Eigenschaft R $\square$; gibt es kein solches, so ist der Ausdruck gleich 0".
Dieser Operator soll hier in etwas abgeänderter Form übernommen werden.
Im Plankalkül handelt es sich meistens darum, einen gegebenen Wertevorrat systematisch zu untersuchen. In diesem Falle wird solange "das nächste Glied mit der Eigenschaft R $\square$" gesucht, bis der Wertevorrat erschöpft ist. Gibt es kein solches, so hat es keinen Sinn, $\mu x = 0$ zu setzen. Das würde zu schweren Fehlern führen.
Ein Beispiel aus der Schachtheorie möge dies veranschaulichen:
Gegeben sei die Feldbesetzung V_0. (Vergl. dort S.). Aus V_0 sei zunächst die Liste V_1 der Punkte ermittelt worden, auf denen weisse Steine stehen. Es sollen jetzt unter diesen Punkten, also den Gliedern von V_1, diejenigen herausgesucht werden, welche von Schwarz an-

gegriffen werden. ($Agr\,(\underset{0}{V})$). Gesucht ist also die Liste:

$$\hat{x}(x \in \underset{1}{V} \wedge Agr(x))$$

Jedoch sollen diese Punkte sofort nach der Ermittlung jedes Einzelnen
Eingabe
als ~~Ausgangs~~werte einer weiteren Rechnung dienen, welche z.B. der Feststellung der Zugfreiheit dient. Es wird dann so verfahren, dass aus der Liste $\underset{0}{V}$ jeweils das nächste Glied der Eigenschaft Agr herausgesucht wird und mit diesem der Rechenplan P durchgerechnet wird.
Wir können also zunächst für das erste Glied ansetzen:

$$\boxed{\mu x\,(x \in \underset{0}{V} \wedge Agr\,(x)) \Rightarrow \underset{0}{Z} \;\Big|\; P\,(\underset{0}{Z})}$$

E23

Gibt es kein solches, so würde es zu einem Fehlresultat führen, wenn $x = 0$ gesetzt würde. Dies würde nämlich besagen, dass auf Punkt (0,0) also dem Feld a1 ein von Schwarz angegriffener weisser Stein steht.

Wir setzen also im Gegensatz zu Hilbert zunächst fest:
Im Plankalkül bedeutet:

$$\mu x, R\square(x)$$

das nächste Glied der Eigenschaft R□ , gibt es kein solches, so wird das Schlusszeichen gegeben.
Als weitere vorteilhafte Regel wird folgende eingeführt:
Werden in einem Wiederholungsplan nacheinander die Werte $\mu x R\square(x)$ gebildet, so werden die bereits gebildeten Werte aus der Untersuchung ausgeschaltet. Auf diese Weise kann ein Wertevorrat systematisch durchkämmt werden.
Wir haben dann einen Ausdruck der Form:

$$W\left[\begin{array}{ccccc|c} \mu x & (x \in V & \wedge R\square(x)) & \Rightarrow & Z & P(Z) \\ & 0 & & & 0 & 0 \\ & \sigma & m\times\sigma & & \sigma & \end{array}\right]$$

E24

Dieser Ausdruck ist allgemein durch folgenden Rechenplan zu ersetzen:

$$\begin{array}{c|lllll}
 & W1\,(N\,(V)) & \big[\,(V,-) & \Rightarrow Z\,\big] & \big| & + \not\Rightarrow Z \\
V & \quad\; 0 & \quad 0 & \quad\; 1 & & \quad\;\; 2 \\
K & & \quad i & \quad\; i & & \\
S & & \quad \sigma & \;(\sigma, 0) & & \quad\;\; 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|llllll}
 & W\,\big[\,(Ex) & \big[\,x \in Z & & \wedge\; \bar{x}\,\big] & \wedge\; Z & \dot{\rightarrow} \\
V & & \qquad\;\; 1 & & & \quad\; 2 & \\
K & & & & \quad\;\; 1 & & \\
S & & (\sigma,0) & m\times(\sigma,0) & \quad\;\; 0 & \quad\; 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|llllllll}
 & W1\,(N(V)) & \big[\,\bar{Z} & \wedge\, R\square(Z) & \dot{\rightarrow}\, \big[\,Z \Rightarrow Z & \big|\; + \not\Rightarrow Z & \big|\; + \not\Rightarrow Z & \big|\; P(Z) & \big|\; Fin^3\,\big]\big] \\
V & \qquad\; 0 & \quad 1 & \qquad\quad 1 & \quad\;\; 1 \qquad 0 & \qquad\quad 1 & \qquad\quad 2 & \quad\; 0 & \\
K & & \quad 1.1 & \qquad\quad 1.0 & \quad\;\; 1.0 & \qquad\quad 1.1 & & & \\
S & & \quad 0 & \qquad\quad \sigma & \quad\;\; \sigma \qquad \sigma & \qquad\quad 0 & \qquad\quad 0 & &
\end{array}$$

In diesem Rechenplan ist zunächst ein Hilfswert $\begin{array}{l}Z\\1\end{array}$

gebildet, der aus der Liste V_0 hervorgeht, indem jedes Glied durch einen Ja - Nein - Wert ergänzt wird. Dieser J.N.- Wert zeigt an, ob das betreffende Glied bereits zur Bildung von Z_0 herangezogen worden ist. Am Anfang sind diese Zusatzangaben also sämtlich negativ.

Der eigentliche Rechenplan besteht dann in einem übergeordneten und einem untergeordneten W - Plan.

Der übergeordnete W - Plan dient der wiederholten Bildung von Z_0 er läuft solange, wie seine Wiederholung Sinn hat; hierfür müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

α a) Es müssen in der Liste Z_1 noch nicht durch ein + Zeichen gekennzeichnete Glieder vorhanden sein.

β b) Handelt es sich nicht um den ersten Ablauf, so muss die vorhergehende Ermittlung ein Z_0 ergeben haben. Andernfalls hat die Wiederholung des gleichen Suchprozesses keinen Sinn. Dies wird durch den Hilfswert Z_2 angezeigt, der also am Anfang positiv sein muss.

Dem Einzelvorgang des Aufsuchens des nächsten Z_0 dient der untergeordnete W - Plan. In der Liste Z_1 werden systematisch diejenigen Glieder untersucht, die noch nicht gekennzeichnet sind. ($\begin{array}{l}\overline{Z}\\1\\i.1\end{array}$).

Sobald auf ein solches Glied das Prädikat R□ zutrifft, wird dieses gleich Z_0 gesetzt und in der Liste Z_1 gekennzeichnet. $(+ \Rightarrow \begin{array}{l}Z\\1\\i.1\end{array})$?. Ferner wird Z_2 positiv und mit Z_0 der Rechenplan

$P(Z_0)$ durchgerechnet. Darauf wird das Schlusszeichen für den untergeordneten W - Plan gegeben.

Im allgemeinen wird sowohl R□ als auch Z_1 durch $P(Z_0)$ nicht beeinflusst werden; d.h. wir haben es mit einer für sämtliche Wiederholungen gleichen Liste Z_1 zu tun (bis auf die Kennzeichnungen der bereits herausgesuchten Glieder) und das Kriterium für die heranzusuchenden Glieder bleibt auch für alle Variationen gleich.

Es ist dann nicht nötig, den Suchprozess für jedes Z_0 über die ganze Liste von Z_1 zu erstrecken. Es brauchen vielmehr nur die noch nicht untersuchten Glieder in Betracht gezogen werden. Dies entspricht jedoch einer systematischen Durchsicht von Z_1 bzw. V_0.

Wir können zunächst folgenden Rechenplan ansetzen:

$$W1\,(N\,(\begin{array}{c}V\\0\end{array}))\;\left[\;R\square\,(\begin{array}{c}V\\0\\i\end{array}) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc}V & \Rightarrow & Z\\0 & & 0\\i & & \end{array}\right.\;\middle|\;P\,(\begin{array}{c}Z\\0\end{array})\;\right] \quad E\,26$$

dieselbe

P4.49 Kap. 2.S. zeigt ein Beispiel, in dem ~~der~~ Ansatz ~~von 9.49~~ benutzt werden muss, da R□ laufend veränderlich ist.

R□ hat hier die Form:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & x & = & Z & \vee & x & = & Z\\ V & & & 1 & & & & 1\\ K & 0 & & & & 1 & & \end{array}$$

Z_1 ist aber jedesmal ein anderer Wert.
Um dies besonders hervorzuheben ist das μ- Zeichen mit einem ~~Strich versehen.~~ (siehe dort) s)
~~In einem W - Ausdruck~~ können mehrere μ - Ausdrücke ~~vorkommen.~~ z.B.

$$W \begin{bmatrix} \mu x\,(x \in V_0 \wedge R\square(x)) \Rightarrow Z_0 \\ \mu x\,(x \in V_0 \wedge R\square(x)) \Rightarrow Z_1 \\ P(Z_0\,,\,Z_0) \end{bmatrix}$$

Es werden hierbei jeweils zwei neue Werte Z_0 und Z_1 mit der Eigenschaft R□ aus der Liste V_0 herausgesucht und mit ihnen $P(Z_0\,,\,Z_1)$ durchgerechnet.
Der Rechenplan, für den Fall, dass die Untersuchung fortlaufend geführt werden kann, lautet dann:

$$0 \Rightarrow \varepsilon$$

$$W \left[\begin{array}{l} \varepsilon < N(V_0) \rightarrow \left[\begin{array}{l} - \Rightarrow Z_2 \;\big|\; - \Rightarrow Z_3 \\ W \begin{bmatrix} \varepsilon < N(V_0) \rightarrow \left[R\square(V_{0,\varepsilon}) \rightarrow \left[V_{0,\varepsilon} \Rightarrow Z_0 \;\big|\; + \Rightarrow Z_2 \;\big|\; Fin^3 \right] \right] \\ \varepsilon + 1 \Rightarrow \varepsilon \end{bmatrix} \\ W \begin{bmatrix} \varepsilon < N(V_0) \rightarrow \left[R\square(V_{0,\varepsilon}) \rightarrow \left[V_{0,\varepsilon} \Rightarrow Z_1 \;\big|\; + \Rightarrow Z_3 \;\big|\; Fin^3 \right] \right] \\ \varepsilon + 1 \Rightarrow \varepsilon \end{bmatrix} \\ Z_2 \wedge Z_3 \rightarrow P(Z_0\,,\,Z_1) \end{array} \right] \end{array} \right]$$

Wir haben jetzt zwei untergeordnete W - Pläne, einen zur Bildung von Z_0 und einen zur Bildung von Z_1 und einen übergeordneten W - Plan zur Bildung der Wertepaare Z_0, Z_1 und Durchrechnung von P. Z_2 und Z_3 besagen, dass Z_0 bzw. Z_1 neu gebildet worden sind, nur dann darf P^3 durchgerechnet werden.
Werden die Werte Z_0 und Z_1 verschiedenen Listen V_0 und V_1 entnommen, oder gelten für sie verschiedene Prädikate R⊡ und R⊟, so brauchen wir zwei Hilfswerte ε_0 und ε_1.

Dem Ausdruck

$$W\left[\begin{array}{l} \mu x\ (x \in V_0 \wedge R\boxdot(x)) \Rightarrow Z_0 \\ \mu x\ (x \in V_1 \wedge R\boxdot(x)) \Rightarrow Z_1 \\ P(Z_0,\ Z_0) \end{array}\right]$$

entspricht dann der Rechenplan:

$$0 \Rightarrow \varepsilon_0 \ \big|\ 0 \Rightarrow \varepsilon_1$$

$$W\left[\varepsilon_0 < N(V_0) \wedge \varepsilon_1 < N(V_1) \rightarrow \left[\begin{array}{l} - \Rightarrow Z_2 \ \big|\ - \Rightarrow Z_3 \\ W\left[\varepsilon_0 < N(V_0) \rightarrow \left[\begin{array}{l} R\boxdot(V_0^{\varepsilon_0}) \rightarrow \left[V_0^{\varepsilon_0} \Rightarrow Z_0 \ \big|\ + \Rightarrow Z_2 \ \big|\ Fin^3\right] \\ \varepsilon_0 + 1 \Rightarrow \varepsilon_0 \end{array}\right]\right] \\ W\left[\varepsilon_1 < N(V_1) \rightarrow \left[\begin{array}{l} R\boxdot(V_1^{\varepsilon_1}) \rightarrow \left[V_1^{\varepsilon_1} \Rightarrow Z_1 \ \big|\ + \Rightarrow Z_3 \ \big|\ Fin^3\right] \\ \varepsilon_1 + 1 \Rightarrow \varepsilon_1 \end{array}\right]\right] \\ Z_2 \wedge Z_3 \rightarrow P(Z_0,\ Z_1) \end{array}\right]\right]$$

e) Der Operator $\Lambda(x)$:

Es wird folgendes festgesetzt:
Der Operator $\Lambda(x)$ entspricht dem Operator ~~μ(x)~~ μx nur mit dem Unterschied, dass die Untersuchung von V_0 beim letzten Gliede begonnen wird.
Es entspricht also dem Ausdruck:

$$W\left[\Lambda x\ (x \in V_0 \wedge R\Box(x)) \Rightarrow Z_0 \ \big|\ P(Z_0)\right]$$

E 24

Der Rechenplan:

$$N(V_0) \Rightarrow \varepsilon$$

$$W\left[\varepsilon \neq 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} - \Rightarrow Z_1 \\ W\left[\varepsilon \neq 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} R\Box(V_0^{\varepsilon}) \rightarrow \left[V_0^{\varepsilon} \Rightarrow Z_0 \ \big|\ + \Rightarrow Z_1 \ \big|\ Fin^3\right] \\ \varepsilon - 1 \Rightarrow \varepsilon \end{array}\right]\right] \\ Z_1 \rightarrow P(Z_0) \end{array}\right]\right]$$

Entsprechendes gilt für Kombinationen von mehreren Λ-und μ-Ausdrücken in einem W - Ausdruck. Hierauf wird zunächst im Einzelnen nicht eingegangen. Genaue Festlegungen hierüber erfolgen im Kapitel "Maschinenfertige Rechenpläne". 4)

f) μ- Operator rechts vom Ergibt - Zeichen:

In dem Ausdruck:

$$\begin{array}{c|l} & W \left[F \Rightarrow \mu \, \underset{0}{R} \right] \\ V & \end{array}$$

bedeutet die Rechenplangleichung in der Klammer: " F ergibt das nächste Glied des Resultats R". R besteht hierbei aus einer Liste von mehreren nacheinander ermittelten Gliedern.
Dieser Ausdruck vertritt den Rechenplan:

$$\begin{array}{c|c|l} & 0 \Rightarrow \varepsilon & W \left[F \Rightarrow \underset{\substack{0\\ \varepsilon}}{R} \;\middle|\; \varepsilon + 1 \Rightarrow \varepsilon \right] \\ V & & \\ K & & \end{array}$$

E29

g) Benennung der Variablen und Zwischenwerte:

In den unter a) bis f) besprochenen Ausdrücken stellt x die gebundene Variable dar. Treten in einem Ausdruck mehrere gebundene Variablen auf, so müssen diese unterschiedlich bezeichnet werden. Handelt es sich um nur zwei, so empfiehlt sich die Verwendung der Zeichen x und y. Bei mehr als zwei gebundenen Variablen empfiehlt sich jedoch die Unterscheidung in $\underset{0}{x}, \underset{1}{x}, \underset{2}{x} \ldots$.
Ebenso müssem im Falle der Verschachtelung von Operatoren, bei Bildung des zugehörigen Rechenplanes die Hilfswerte Z, $\underset{0}{Z}$, $\underset{1}{Z}$ usw. durch Umbenennung bzw. Unterindizes unterschieden werden. Es gilt dies auch in Bezug auf die Werte des Rechenplanes innerhalb dem der Operator auftritt. Näheres hierüber im Kapitel "Maschinenfertige Rechenpläne". 4) K

/u/h.

h) Implizite und explizite Ausdrücke mit Operatoren:

Die besprochenen Ausdrücke haben eine der Formen:

$$(x) \; R\,\square(x) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

$$(x)\,(x \in \underset{0}{V} \rightarrow R\,\square(x)) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

$$(Ex) \; R\,\square(x) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

$$(Ex) \; (x \in \underset{0}{V} \wedge R\,\square(x)) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

$$\hat{x} \; R\,\square(x) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

$$\hat{x} \; (x \in \underset{0}{V} \wedge R\,\square(x)) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

E30

$$\hat{\hat{x}}\,(x \in V_0 \wedge R\square(x)) \Rrightarrow R_0$$

$$\acute{x}\, R\square(x) \Rrightarrow R_0$$

$$\acute{x}\,(x \in V_0 \wedge R\square(x)) \Rrightarrow R_0$$

E 30

$$W\left[\mu x\,(x \in V_0 \wedge R\square(x)) \Rrightarrow Z_0 \;\middle|\; P(Z_0)\right]$$

$$W\left[\Lambda x\,(x \in V_0 \wedge R\square(x)) \Rrightarrow Z_0 \;\middle|\; P(Z_0)\right]$$

Es hat zunächst den Anschein, dass in diesen Ansätzen R_0 und Z_0 explizit gegeben sind, da sie nur rechts vom Ergibt - Zeichen vorkommen.
Die an Stelle dieser Ausdrücke zu setzenden Rechenpläne geben zwar in jedem Falle eine systematische Berechnungsmethode. Oft ist aber dieses systematische Verfahren zu weitläufig und muss durch elegantere Methoden ersetzt werden.
So kann z.B. der implizite Ansatz

$$x^2 + ax + b = 0$$

auf folgende scheinbar explizite Form gebracht werden:

$$\acute{x}\,(x^2 + ax + b = 0) \Rrightarrow R_0$$

Die systematische Methode wäre in diesem Falle gleichbedeutend mit dem systematischen Durchprobieren aller möglichen Werte für x.
In diesem Falle sieht die explizite Lösung bekanntlich wie folgt aus:

$$-a/2 + \sqrt{a^2/4 - b} \Rrightarrow R_{0,0}$$

$$-a/2 - \sqrt{a^2/4 - b} \Rrightarrow R_{0,1}$$

E 31

In der Statistik jedoch stellen Ansätze der genannten Art oft bereits die explizite Lösung dar, da es keinen einfacheren Lösungsweg gibt.
Die systematische Methode entspricht dem Sortiervorgang beim Lochkartenverfahren. Die Angaben auf den einzelnen Lochkarten entsprechen den Gliedern der zu untersuchenden Liste, aus der die Glieder mit der Eigenschaft $R\square$ herausgesucht werden sollen. Bei komplizierten Kriterien ist dabei noch mehrmaliger Durchlauf erforderlich.
Ein interessantes Beispiel ist noch folgendes:
Schachtheorie S. , $P\Delta$ 32.
Liste der Punkte, die zwischen den Punkten V_0 und V_1 liegen.

$R\Delta 29\,(V_0, V_1, V_2)$ bedeutet: V_0 liegt zwischen V_1 und V_2 (s. dort S.).

Wir setzen dann an:

$$\hat{x}\left[R\Delta 29\,(x,\ \underset{0}{V},\ \underset{1}{V})\right] \Rightarrow \underset{0}{R}$$

In diesem Falle würde die systematische Methode darin bestehen, sämtliche 64 Punkte des Schachfeldes daraufhin zu prüfen, ob auf sie das Kriterium R Δ 29 (X, V_0, V_1) zutrifft.
Der Umfang dieser Rechnung ist immerhin noch erträglich.
Jedoch gibt es eine Methode, die erheblich schneller zum Ziele führt:
Es werden von V_0 aus die Punkte konstruiert, die in Richtung V_1 liegen. Dadurch ergibt sich die Liste der gesuchten Punkte direkt in lückenloser Folge.
Entsprechend werden bei P Δ 34 die Punkte konstruiert, welche zu V_0 in Springerrelation stehen.
Diese Methode, die gesuchten Werte direkt durch Konstruktion zu gewinnen, sei als "konstruktive Methode" im Gegensatz zur "systematischen Methode" bezeichnet.
Das Gesetz für die konstruktive Methode muss in jedem Falle besonders aufgestellt werden.
Man kann also nicht ohne weiteres entscheiden, ob ein Ausdruck entsprechend Seite 36 implizit oder explizit ist.
Es gibt vielmehr verschiedene, an sich äquivalente Ausdrücke, die auf verschiedenen Wegen mit unterschiedlichem Aufwand zum Ziele führen.

8) Verschiedenes

a) Die Operatoren $\bigwedge R$, $\bigvee R$, ΣR, ΠR.

Für die Ausdrücke:

	V	$\wedge$	V	. . . . . $\wedge$	V	. . . . . $\wedge$	V	$\Rightarrow$	R
V	0.0		0.1		0.i		0.n-1		0
S	0		0		0		0		0

	V	$\vee$	V	. . . . . $\vee$	V	. . . . . $\vee$	V	$\Rightarrow$	R
V	0.0		0.1		0.i		0.n-1		0
S	0		0		0		0		0

F 32

	V	+	V	. . . . . +	V	. . . . . +	V	$\Rightarrow$	R
V	0.0		0.1		0.i		0.n-1		0
A	8		8		8		8		8

	V	$\times$	V	. . . . . $\times$	V	. . . . . $\times$	V	$\Rightarrow$	R
V	0.0		0.1		0.i		0.n-1		0
A	8		8		8		8		8

lassen sich entsprechend den bisher besprochenen Regeln folgende Rechenpläne ansetzen:

$$\begin{array}{c|ccc|} & + & \Rightarrow & Z \\ V & & & 0 \\ S & & & 0 \end{array} \quad W1\ (n) \begin{bmatrix} V & \wedge\, Z & \Rightarrow & Z \\ 0.i & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{|ccc} Z & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & - & \Rightarrow & Z \\ V & & & 0 \\ S & & & 0 \end{array} \quad W1\ (n) \begin{bmatrix} V & \vee\, Z & \Rightarrow & Z \\ 0.i & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{|ccc} Z & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \end{array}$$

E33

$$\begin{array}{c|ccc|} & 0 & \Rightarrow & Z \\ V & & & 0 \\ S & & & 8 \end{array} \quad W1\ (n) \begin{bmatrix} V & +\, Z & \Rightarrow & Z \\ 0.i & 0 & & 0 \\ 8 & 8 & & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{|ccc} Z & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ 8 & & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & 1 & \Rightarrow & Z \\ V & & & 0 \\ A & & & 8 \end{array} \quad W1\ (n) \begin{bmatrix} V & \times\, Z & \Rightarrow & Z \\ 0.i & 0 & & 0 \\ 8 & 8 & & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{|ccc} Z & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ 8 & & 8 \end{array}$$

Hierfür seien folgende abgekürzte Schreibweisen eingeführt:

$$W1\ (n) \begin{bmatrix} V & \Rightarrow & \bigwedge R \\ 0.i & & 0 \end{bmatrix} \qquad W1\ (n) \begin{bmatrix} V & \Rightarrow & \bigvee R \\ 0.i & & 0 \end{bmatrix}$$

E34

$$W1\ (n) \begin{bmatrix} V & \Rightarrow & \sum R \\ 0.i & & 0 \end{bmatrix} \qquad W1\ (n) \begin{bmatrix} V & \Rightarrow & \prod R \\ 0.i & & 0 \end{bmatrix}$$

Die Zeichen $\bigwedge$, $\bigvee$, $\sum$, $\prod$ werden gelesen:
Konjunktionsglied von ...
Disjunktionsglied von ...
Summand von ...
Faktor von ...

Ihre Anwendung enpfiehlt sich immer dort, wo die einzelnen Glieder der Operationsketten nacheinandor gebildet werden.
Es ist dabei nicht nötig, dass sie alle in einem geschlossenen W - Ausdruck auftreten. Es sind vielmehr auch Ausdrücke möglich in der Form:

$$\begin{array}{lcl} F_0 & \Rightarrow & \bigwedge R_0 \\ F_1 & \Rightarrow & \bigwedge R_0 \\ \vdots & & \\ F_n & \Rightarrow & \bigwedge R_0 \end{array}$$

E35

Jedoch darf in einem Rechenplan auf den gleichen Wert nur eins der 4 Zeichen $\bigwedge$, $\bigvee$, $\sum$, $\prod$ angewandt werden.
(Vergl. "Algebraische Ausdrücke" S.).

b) <u>Darstellung von Potenzen:</u>

Um im Zeilenkalkül sämtliche Werte auf die Hauptzeile ausrichten zu können, können analog zur Darstellung zusammengesetzter Indizes (s.S. 17) die Potenzen auf die Hauptzeile gezogen werden. Durch Linienzüge muss dann der eigentliche Platz des Wertes angedeutet werden:

$$V_0^{V_1} = V_0 \urcorner\!\llcorner V_1$$

E 36

Auf diese Weise können beliebig komplizierte Ausdrücke leicht als Potenzen dargestellt werden:

$$\begin{array}{c|cc} & V & \llcorner V \\ V & 1 & 2 \\ K & 1.3 & 0 \\ A & 8 & 9 \end{array}$$

E 37

c) <u>Nulliste und Variable als Liste mit einem Glied:</u>

Angaben, die sich aus einer Folge von Gliedern gleicher Struktur zusammensetzen, können als Listen bezeichnet werden. ($S = m \times \sigma$, vergl. Kap. 2 S.).
Haben diese Listen variable Gliedzahl, so kann der Sonderfall eintreten, dass diese Gliedzahl gleich Null ist. Für eine solche Liste setzen wir allgemein das Zeichen (ϕ).
Der Ansatz

$$\begin{array}{ccc} \phi & \Rightarrow & Z \\ & & 0 \\ & & \square \times \sigma \end{array}$$

bedeutet dann, dass die Liste Z_0 einen Zwischenwert darstellt, und <u>zunächst leer ist</u>. Z.B. wenn das Resultat eine Liste darstellt und die Glieder dieser Liste nacheinander gebildet werden. Am Anfang ist die "Aufbauliste" des Resultats dann leer.
Es kann aber auch vorkommen, dass eine solche veränderliche Liste zunächst nur ein einziges Glied enthalten soll.
Wir setzen dann wie folgt an:

$$\begin{array}{c|ccc} & V & \Rightarrow & Z \\ K & 0 & & 0 \\ S & \sigma & & \square \times \sigma \end{array}$$

Das heisst, V_0 soll zunächst als einziges Glied die Liste Z_0 bilden. Wir haben in diesem Falle links und rechts des Ergibt-Zeichens Angaben verschiedener Struktur stehen, was nur in diesem Ausnahmefall erlaubt ist.

d) <u>Behauptungszeichen:</u>

Soll von einem Ausdruck betont werden, dass er eine Identität, d.h. eine allgemeingültige Formel darstellt, so wird das "Behauptungszeichen" $\vdash$ davorgesetzt: $\vdash F$

(Beispiel Kap. 2 S. , Pl. 39).

Zu Seite 8

δ) Resultatwerte:
Dieses sind die durch den Rechenplan aus den Ausgangsangaben errechneten Resultate. Sie werden mit R und einem Index 0, 1, 2 ... bezeichnet.

Zu Seite 31

Auch für diesen Operator haben die praktisch vorkommenden Ausdrücke meistens die Form:

$$\acute{x}\left(x \in \underset{0}{V} \wedge R\square(x)\right) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

E23

Hierfür ergibt sich folgender Rechenplan:

$$\begin{array}{l|l} \\ V & W1(N(\underset{0}{V}))\left[R\square(\underset{\substack{0\\i}}{V}) \rightarrow \left[\underset{\substack{0\\i}}{V} \Rightarrow \underset{0}{R} \quad Fin^3\right]\right] \\ K & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \\ V & W1(N(\underset{0}{V}))\left[R\square(\underset{\substack{0\\i}}{V}) \rightarrow \left[\underset{\substack{0\\i}}{V} \Rightarrow \underset{0}{R} \;\middle|\; Fin^3\right]\right] \\ K & \end{array}$$

E24

Dipl.-Ing. K. Zuse
Ingenieurbüro
und Apparatebau
Berlin

Kap. 2

2

I

Kap. 2

Inhaltsverzeichnis von Kapitel 2

Allgemeine Rechenpläne

Kap. 2: Allgemeine Rechenpläne

I. Operationen mit Angaben der Struktur So (Ja-Nein-Wert).

1) Operationen mit einem Operanden:

Negation: $\overline{\underset{0}{V}}$ im Sinne der Aussagenlogik.

2) Operationen mit zwei Operanden:

$\underset{0}{V} \;\dot{0}\; \underset{1}{V}$. Mögliche Werte für $\dot{0}$: $\vee, \wedge, \rightarrow, \sim, \nsim$.
im Sinne der Aussagenlogik.

Wertverlauf der Funktionen:

$\underset{0}{V}$	$\underset{1}{V}$	Operation $\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\sim$	$\nsim$
−	−	−	−	+	+	−
+	−	+	−	−	−	+
−	+	+	−	+	−	+
+	+	+	+	+	+	−

E 38

II. Rechenpläne mit Angaben der Struktur S1.n .

S1.n = n × So .

1) Rechenpläne mit einer Variablen.
Aussagen über S1.n .

	$R(V \;)$	$\Rightarrow$	R
V	0		0
S	1.n		0

P1.o Generaldisjunktion: V(V). (Mindestens ein Glied positiv).

```
           o
  | (Ex)(x ∈ V ∧ x)  ⇛  R1.o
V |          o           o
S |    o  o 1.n  o       o
```

Explizite Form:

```
  | - ⇛ Z | W1(N(V)) | Z ∨ V ⇛ Z | Z ⇛ R
V |     o |     o    | o   o   o | o   o
K |       |          |     i     |
S |     o |    1.n   | o   o   o | o   o
```

Andere Schreibweise:

```
  | W1(N(V)) [ V ⇛ VR ]
V |     o    [ o    o ]
K |          [ i      ]
S |          [ o    o ]
```

P1.1 Generalkonjunktion: $\mathsf{\Lambda}$ (V) . (Alle Glieder positiv).

```
               o
  | (x)(x ∈ V → x)  ⇛  R
V |         o          o
S |  o  o  1.n  o      o
```

Explizite Form:

```
  | + ⇛ Z | W1(N(V)) | Z ∧ V ⇛ Z | Z ⇛ R
V |     o |     o    | o   o   o | o   o
K |       |          |     i     |
S |     o |    1.n   |     o     | o   o
```

Andere Schreibweise:

```
  | W1(N(V)) [ V ⇛ Λ R ]
V |     o    [ o     o ]
K |          [ i       ]
S |          [ o     o ]
```

P1.4
P1.5
P1.6
P1.7

```
  | W1(N(V)-1) [ V δ V ⇛ Z ] | Λ Z  ⇛ R
V |     o      [ o   o   1 ] |   1    o
K |            [ i  i+1  i ] |
S |    1.n     [ o   o   o ] |  1.n-1
```

Werte für δ :

Planzeichen	δ	Bedeutung
P1.3	∨	Von zwei benachbarten Gliedern mindestens eines positiv.
P1.4	∼	Alle Glieder einander gleich.
P1.5	≁	Alle Glieder haben abwechselnde Werte.
P1.6	→	Links von Minuszeichen kein Pluszeichen.

Beispiel S.50.

P1.8 Symmetrie:

```
  o ⇛ i | n-1 ⇛ j | + ⇛ Z
                        o

  | W [ i < j → [ (V ∼ V) ∧ Z ⇛ Z | i+1 ⇛ i | j-1 ⇛ j ]]
V |             [  o   o    o   o |
K |             [  i   j          |
S |             [  o   o    o   o |

  Z ⇛ R
  o   o
```

P1.9 Genau ein Glied ist positiv:

$$
\begin{array}{c|ccc|c|cccccc|ccccc|cccc}
 & - & \Rightarrow & Z & W1(N(V)) & \overline{V} & \overline{\wedge} & \overline{Z} & \Rightarrow & \wedge & R & V & \vee & Z & \Rightarrow & Z & Z & \Rightarrow & \wedge & R \\
V & & & 0 & 0 & 0 & & 0 & & & 0 & 0 & & 0 & & 0 & 0 & & & 0 \\
K & & & & & i & & & & & & i & & & & & & & & \\
S & & & 0 & 1.n & 0 & & 0 & & & 0 & 0 & & 0 & & 0 & 0 & & & 0
\end{array}
$$

P1.9 in anderer Schreibweise:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
- & \Rightarrow & Z & + & \Rightarrow & Z \\
 & & 0 & & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|ccccccc|ccccc|ccccc}
 & W1(N(V)) & Z & \wedge & (V & \rightarrow & \overline{Z}) & \Rightarrow & Z & Z & \vee & V & \Rightarrow & Z & Z & \wedge & Z & \Rightarrow & R \\
V & 0 & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & 0 & & 0 & & 0 & 0 & & 1 & & 0 \\
K & & & & i & & & & & & & i & & & & & & &
\end{array}
$$

Beispiele für P1.o bis P1.9 :

V o	R1.o o	R1.1 o	R1.4 o	R1.5 o	R1.6 o	R1.7 o	R1.8 o	R1.9 o
−	−	−					+	−
+	+	+					+	+
−−	−	−	−	+	−	+	+	−
−+	+	−	+	−	+	+	−	+
+−	+	−	+	−	+	−	−	+
++	+	+	+	+	−	+	+	−
+++	+	+	+	+	−	+	+	−
+−+	+	−	+	−	+	−	+	−
−−−	−	−	−	+	−	−	+	−
++−−	+	−	−	−	−	−	−	−
++−++	+	−	+	−	−	−	+	−
−−+++	+	−	−	−	−	+	−	−
−−+−−	+	−	−	−	−	−	−	+
+−−−−	+	−	−	−	−	−	−	+
−−−−+	+	−	−	−	−	−	−	+
+−+−+	+	−	+	−	+	−	+	−

2) <u>Rechenpläne mit einer Variablen der Struktur S1.n und einem Resultatwert der Struktur S1.n .</u>

$$\begin{array}{l|lcl} & R(V) & \Rightarrow & R \\ V & \quad 0 & & 0 \\ S & \;1.n & & 1.n \end{array}$$

P1.16 General-Negation: $\begin{array}{c} W1(N(V)) \\ 0 \end{array} \left[\begin{array}{ccc} \overline{V} & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i \end{array} \right]$

Operationszeichen $\begin{array}{cc} \theta & V \\ & 0 \end{array}$

P1.17 Spiegelung: $\begin{array}{c} W2(N(V)) \\ 0 \end{array} \left[\begin{array}{ccc} V & \Rightarrow \mu & R \\ 0 & & 0 \\ i & & \end{array} \right]$

P1.18 Aufwärts-Implizierung:

$\begin{array}{c} - \Rightarrow Z \\ \quad\;\; 0 \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} W1(N(V)) \\ 0 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} Z & \vee & V & \Rightarrow & Z \\ 0 & & 0 & & 0 \\ & & i & & \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} Z & \Rightarrow \mu & R \\ 0 & & 0 \end{array} \right]$

Es gilt: $(x) \begin{array}{c} R1.6 \\ 0 \end{array} \left(\begin{array}{c} R1.18 \\ 0 \end{array}(x) \right)$

P1.19 Abwärts-Implizierung:

$\begin{array}{c} R1.17 \\ 0 \end{array} \left(\begin{array}{c} R1.18 \\ 0 \end{array} \left(\begin{array}{c} R1.17 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} (V) \\ 0 \end{array} \right) \right) = \begin{array}{c} R1.19 \\ 0 \end{array}$

Es gilt: $(x) \begin{array}{c} R1.6 \\ 0 \end{array} \left(R1.17 \left(R1.19(x) \right) \right)$

P1.20 Kennzeichnung des ersten positiven Gliedes von unten:

$\begin{array}{c} - \Rightarrow Z \\ \quad\;\; 0 \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} W1(N(V)) \\ 0 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} \overline{Z} & \wedge & V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 & & 0 \\ & & i & & i \end{array} \middle| \begin{array}{ccccc} Z & \vee & V & \Rightarrow & Z \\ 0 & & 0 & & 0 \\ & & i & & \end{array} \right]$ $\quad \begin{array}{c} V \\ 0 \\ i \end{array} \Rightarrow V$

Es gilt: $(x) \left[\begin{array}{c} R1.9 \\ 0 \end{array} \left(\begin{array}{c} R1.20 \\ 0 \end{array}(x) \right) \vee x = 0 \right]$

P1.21 Kennzeichnung des ersten positiven Gliedes von oben:

$\begin{array}{c} R1.17 \\ 0 \end{array} \left(\begin{array}{c} R1.20 \\ 0 \end{array} \left(\begin{array}{c} R1.17 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} (V) \\ 0 \end{array} \right) \right) \Rightarrow \begin{array}{c} R \\ 0 \end{array}$

Es gilt: $(x) \left[\begin{array}{c} R1.9 \\ 0 \end{array} \left(R1.21(x) \right) \vee x = 0 \right]$

P1.22 Aufwärtsverschiebung:

$$\begin{array}{c|cc|c|}
 & - & \Rightarrow R & W1(N(V)-1) \\
V & & 0 & 0 \\
K & & 0 &
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc}
V & \Rightarrow & R \\
0 & & 0 \\
i & & i+1
\end{array}\right]$$

P1.23 Abwärtsverschiebung:

$$\begin{array}{c|cc|c|}
 & - & \Rightarrow R & W1(N(V)-1) \\
V & & 0 & 0 \\
K & & n-1 &
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc}
V & \Rightarrow & R \\
0 & & 0 \\
i+1 & & i
\end{array}\right]$$

P1.24 Aufwärtskreislauf:

$$\begin{array}{c|cc|c|}
 & V & \Rightarrow R & W1(N(V)-1) \\
V & 0 & 0 & 0 \\
K & n-1 & 0 &
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc}
V & \Rightarrow & R \\
0 & & 0 \\
i & & i+1
\end{array}\right]$$

P1.25 Abwärtskreislauf:

$$\begin{array}{c|cc|c|}
 & V & \Rightarrow R & W1(N(V)-1) \\
V & 0 & 0 & 0 \\
K & 0 & n-1 &
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc}
V & \Rightarrow & R \\
0 & & 0 \\
i+1 & & i
\end{array}\right]$$

P1.26 Vorwärtszählen:

$$\begin{array}{c|cc|c|}
 & + & \Rightarrow Z & W1(N(V)) \\
V & & 0 & 0 \\
K & & &
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
V & \nsim & Z & \Rightarrow & R & V & \wedge & Z & \Rightarrow & Z \\
0 & & 0 & & 0 & 0 & & 0 & & 0 \\
i & & & & i & i & & & &
\end{array}\right]$$

P1.27 Rückwärtszählen:

$$\begin{array}{c|cc|c|}
 & - & \Rightarrow Z & W1(N(V)) \\
V & & 0 & 0 \\
K & & &
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
V & \sim & Z & \Rightarrow & R & V & \vee & Z & \Rightarrow & Z \\
0 & & 0 & & 0 & 0 & & 0 & & 0 \\
i & & & & i & i & & & &
\end{array}\right]$$

Andere Schreibweise für P1.26 , P1.27 :

$$\cancel{\begin{array}{ccccccc}
R1.26(V) & = & V & + 1 & \Rightarrow & R1.26(V) \\
0 \quad\; 0 & & 0 & & & 0 \qquad i
\end{array}}$$

$$\cancel{\begin{array}{ccccccc}
R1.27(V) & = & V & - 1 & \Rightarrow & R1.27(V) \\
0 \quad\; 0 & & 0 & & & 0 \qquad i
\end{array}}$$

$$\begin{array}{l|l}
P1.26 & \underset{0}{V} + 1 \Rightarrow \underset{0}{R} \\
P1.27 & \underset{0}{V} - 1 \Rightarrow \underset{0}{R}
\end{array}$$

Beispiele für R1.16 bis R1.27:

V_o	R1.16	R1.17	R1.18	R1.19	R1.20	R1.21
−	+	−	−	−	−	−
+	−	+	+	+	+	+
−−	++	−−	−−	−−	−−	−−
−+	+−	+−	−+	++	−+	−+
+−	−+	−+	++	+−	+−	+−
++	−−	++	++	++	+−	−+
−−−−	++++	−−−−	−−−−	−−−−	−−−−	−−−−
−−−+	+++−	+−−−	−−−+	++++	−−−+	−−−+
−−+−	++−+	−+−−	−−++	+++−	−−+−	−−+−
−+−+	+−+−	+−+−	−+++	++++	−+−−	−−−+
+−−−	−+++	−−−+	++++	+−−−	+−−−	+−−−
+−++	−+−−	++−+	++++	++++	+−−−	−−−+
+++−	−−−+	−+++	++++	+++−	+−−−	−−+−
++++	−−−−	++++	++++	++++	+−−−	−−−+

V_o	R1.22	R1.23	R1.24	R1.25	R1.26	R1.27
−	−	−	−	−	+	+
+	−	−	+	+	−	−
−−	−−	−−	−−	−−	+−	++
−+	−−	+−	+−	+−	++	+−
+−	−+	−−	−+	−+	−+	−−
++	−+	+−	++	++	−−	−+
−−−−	−−−−	−−−−	−−−−	−−−−	+−−−	++++
−−−+	−−−−	−−+−	+−−−	−−+−	+−−+	+++−
−−+−	−−−+	−+−−	−−−+	−+−−	+−+−	++−−
−+−+	−−+−	+−+−	+−+−	+−+−	++−+	+−−+
+−−−	−+−−	−−−−	−+−−	−−−+	−+−−	−−−−
+−++	−+−+	−++−	++−+	−+++	−+++	−−++
+++−	−+++	++−−	−+++	++−+	−−−+	−++−
++++	−+++	+++−	++++	++++	−−−−	−+++

3) Verschiedene Rechenpläne mit einer Variablen der Struktur S1.n .

P1.32 Vorwärtszählen mit Signal bei Überschreitung:

```
 | R(V) ⇒ (R,   R)
V|   o      o   1
S|  1.n    1.n  o

 | + ⇒ Z | W1(N(V)) [ V ~ Z ⇒ R | V ∧ Z ⇒ Z ] | Z ⇒ R
V|     o |        o [ o   o   o | o   o   o ] | o   1
K|       |          [ i       i | i         ] |
```

P1.33 Rückwärtszählen mit Signal bei Unterschreitung:

```
 | R(V) ⇒ (R,   R)
V|   o      o   1
S|  1.n    1.n  0

 | - ⇒ Z | W1(N(V)) [ V ~ Z ⇒ R | V ∨ Z ⇒ Z ] | Z̄ ⇒ R
V|     o |        o [ o   o   o | o   o   o ] | o   1
K|       |          [ i       i | i         ] |
```

P1.36 Übertragung gesteuert durch $\underset{1}{V}$:

Ub

```
 | Ub(V,  V) ⇒ R
V|    o   1    o
S|   1.n  o   1.n

  V̄ → o ⇒ R | V → V ⇒ R
  1       o | 1   o   o
```

[illegible]

```
Ub( V, V, [illegible] ) | V̄ → V ⇒ R
    o  1  o             |     1   
    o  o  o               V̄ → V ⇒ R
                          0   2   0
```

P1.37 Anzahl der positiven Glieder:

```
 | R(V) ⇒ R   | m < n
V|   o    o   |
S|  1.n  1.m  |

 | o ⇒ Z | W1(n) [ V → (Z + 1 ⇒ Z) ] | Z ⇒ R
V|     o |       [ o     o       o ] | o   o
K|       |       [ i               ] |
```

P1.39 Zuordnung einer Angabe der Eigenschaft R1.9 zu einer Angabe der Struktur S1.n , aufgefaßt als ~~Sek~~=Zahl:
Dual Zahl

```
 | R(V) ⇒ R  | ~~m = 2^n~~ | ⊢ R1.9(R)
V|   o    o  |             |        o
S|  1.n  1.m |             |

 | o ⇒ Z | + ⇒ Z ┌ V | Z ⇒ R
V|     o |     o ┘ o | o   o
K|       |           |
S|   1.m |     o  1.n|
```

$|2^n \Rightarrow m|$

Beispiele:

V o	0	1	2	3	4	5	6	7	
--	+	-	-	-					C
-+	-	-	+	-					2
++-	-	-	-	+	-	-	-	-	3
+++	-	-	-	-	-	-	-	+	7

P1.40 Aufwärtsverschiebung um eine gegebene Stellenzahl, ~~mit Signal bei Überschreitung~~:

```
    R(V,   V) ⇒ R    | m < n
      o    1    o    |
     1.n  1.m  1.n   |

  | V ⇒  Z  | V ⇒  Z
V | 1    o  | o    1
S |1.m  1.m |1.n  1.n

  | Z ≠ O  →  ⎡ - ⇒ Z | W1(n-1) ⎡ Z ⇒ Z   ⎤                     ⎤
V | o         ⎢     1 |         ⎢ 1   2   ⎥                     ⎥
K |           ⎢     o |         ⎢ i   i+1 ⎥                     ⎥
S |1.m  1.m   ⎢     o |         ⎣ o   o   ⎦                     ⎥
              ⎢                                                 ⎥
V |           ⎢ Z ⇒  Z  | Z    ⇒ V R | Z - 1 ⇒ Z                ⎥
K |           ⎢ 2    1  | 1        1 | o       o                ⎥
S |           ⎢         |n-1         |                          ⎥
  |           ⎣1.n  1.n | o        o |                          ⎦

  | Z ⇒ R
V | o   o
S |1.n 1.n
```

P1.41 Abwärtsverschiebung entsprechend P1.40 analog gebildet (vgl. P1.23 , S.46).

4) <u>Aussagen über 2 Angaben der Struktur S1.n .</u>

```
P1.64  |  R(V,   V) ⇒ R
 1.65 V|    o    1    o
 1.66 S|   1.n  1.n   o
 1.67
 1.68
              W1(n) ⎡ V  Ó  V ⇒ Λ R ⎤
                    ⎢ o     1     o ⎥
                    ⎣ i     i       ⎦
```

Es gilt für

	$\overset{\shortmid}{\circ}$
P1.64	$\vee$
P1.65	$\wedge$
P1.66	$\rightarrow$
P1.67	$\not\sim$
P1.68	$\sim$

Für R1.68(V_0 , V_1) kann geschrieben werden:

$$V_0 = V_1 \; .$$

P1.72

$$\begin{array}{c|ccccc} & V & \leqslant & V & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 1 & & 0 \\ S & 1.n & & 1.n & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|} \\ V \\ K \\ S \end{array} \; W1(n) \left[\begin{array}{ccc|ccccc} V & \Rightarrow & Z & V & \not\sim & V & \Rightarrow & Fin^2 \\ 0 & & 0 & 0 & & 1 & & \\ i & & & i & & i & & \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 & & \end{array}\right] \left|\begin{array}{ccc} \bar{Z} & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ & & \\ 0 & & 0 \end{array}\right.$$

P1.73 $V_0 \geqslant V_1$, wie P1.72 , V_0 vertauschen mit V_1 .

P1.74

$$\begin{array}{c|ccccc} & V & < & V & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 1 & & 0 \\ S & 1.n & & 1.n & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|} \\ V \\ K \\ S \end{array} \; W1(n) \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccccc} V & \Rightarrow & Z & V & \Rightarrow & Z & V & \not\sim & V & \Rightarrow & Fin^2 \\ 0 & & 0 & 1 & & 1 & 0 & & 1 & & \\ i & & & i & & & i & & i & & \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & & \end{array}\right] \left|\begin{array}{ccccc} \bar{Z} & \wedge & Z & \Rightarrow & R \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}\right.$$

P1.75 $V_0 > V_1$, wie P1.74 , V_0 vertauschen mit V_1 .

5) <u>Operationen mit 2 Angaben der Struktur S1.n .</u>

$$\begin{array}{c|cccc} & R(V, & V) & \Rightarrow & R \\ V & 0 & 1 & & 0 \\ S & 1.n & 1.n & & 1.n \end{array}$$

P1.96
P1.97
P1.98
P1.99
P1.100

$$\begin{array}{c|} \\ V \\ K \\ S \end{array} \; W1(n) \left[\begin{array}{ccccc} V & \overset{\shortmid}{\circ} & V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 1 & & 0 \\ i & & i & & i \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

	$\overset{\shortmid}{\circ}$	Op.-Zeichen
P1.96	$\vee$	$\vee\!\!\!\vee$
P1.97	$\wedge$	$\wedge\!\!\!\wedge$
P1.98	$\rightarrow$	$\rightrightarrows$
P1.99	$\not\sim$	$\not\approx$
P1.100	$\sim$	$\approx$

P1.104 Maj $\begin{array}{lllll} (V & , & V) & \Rightarrow & R \\ \ \ 0 & & 1 & & 0 \\ 1.n & & 1.n & & 1.n \end{array}$. (Der größere der beiden Werte $\underset{0}{V}$, $\underset{1}{V}$.)

$$\underset{0}{V} \leq \underset{1}{V} \Rightarrow \underset{0}{Z} \;\Big|\; \underset{0}{\bar{Z}} \rightarrow \underset{0}{V} \Rightarrow \underset{0}{R} \;\Big|\; \underset{0}{Z} \rightarrow \underset{1}{V} \Rightarrow \underset{0}{R}$$

P1.105 Min $(\underset{0}{V} , \underset{1}{V}) \Rightarrow \underset{0}{R}$. (Der kleinere der beiden Werte $\underset{0}{V}$, $\underset{1}{V}$.)

$$\underset{0}{V} \leq \underset{1}{V} \Rightarrow \underset{0}{Z} \;\Big|\; \underset{0}{Z} \rightarrow \underset{0}{V} \Rightarrow \underset{0}{R} \;\Big|\; \underset{0}{\bar{Z}} \rightarrow \underset{1}{V} \Rightarrow \underset{0}{R}$$

P1.106 Ordnen zweier Angaben der Größe nach; kleinerer Wert zuerst:

Ord 0

$$\begin{array}{c|lllllll} & R(V & , & V) & \Rightarrow & (R & , & R) \\ V & \ \ 0 & & 1 & & \ 0 & & 1 \\ S & 1.n & & 1.n & & 1.n & & 1.n \end{array} \qquad \text{Ord } 0\ (\underset{0}{V} , \underset{1}{V})$$

$$\underset{0}{V} \leq \underset{1}{V} \Rightarrow \underset{0}{Z} \;\Big|\; \underset{0}{Z} \rightarrow \left[\underset{0}{V} \Rightarrow \underset{0}{R} \;\Big|\; \underset{1}{V} \Rightarrow \underset{1}{R} \right]$$

$$\underset{1}{\bar{Z}} \rightarrow \left[\underset{1}{V} \Rightarrow \underset{0}{R} \;\Big|\; \underset{0}{V} \Rightarrow \underset{1}{R} \right]$$

P1.107 Wie P1.106 , größerer Wert zuerst:

$$\underset{0}{V} \geq \underset{1}{V} \Rightarrow \underset{0}{Z} \;\Big|\; \underset{0}{\bar{Z}} \rightarrow \left[\underset{0}{V} \Rightarrow \underset{0}{R} \;\Big|\; \underset{1}{V} \Rightarrow \underset{1}{R} \right]$$

$$\underset{0}{Z} \rightarrow \left[\underset{1}{V} \Rightarrow \underset{0}{R} \;\Big|\; \underset{0}{V} \Rightarrow \underset{1}{R} \right]$$

6) <u>Beziehungen zwischen 3 Angaben der Struktur S1.n .</u>

$\underset{0}{V}$, $\underset{1}{V}$, $\underset{2}{V}$ aufgefaßt als positive ganze ~~Sek~~=Zahlen: D...

$$\begin{array}{c|lllllll} & R(V & , & V & , & V) & \Rightarrow & R \\ V & \ \ 0 & & 1 & & 2 & & 0 \\ S & 1.n & & 1.n & & 1.n & & 0 \end{array}$$

P1.128 $\underset{0}{V}$ liegt zwischen $\underset{1}{V}$ und $\underset{2}{V}$, Zw$(\underset{0}{V} , \underset{1}{V} , \underset{2}{V})$

$$(\underset{1}{V} < \underset{0}{V} \wedge \underset{0}{V} < \underset{2}{V}) \vee (\underset{1}{V} > \underset{0}{V} \wedge \underset{0}{V} > \underset{2}{V}) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

P1.129 $\underset{0}{V}$ liegt außerhalb von $\underset{1}{V}$ und $\underset{2}{V}$:

$$(\underset{0}{V} < \underset{1}{V} \wedge \underset{0}{V} < \underset{2}{V}) \vee (\underset{0}{V} > \underset{1}{V} \wedge \underset{0}{V} > \underset{2}{V}) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

III. Rechenpläne zwischen Paaren von Angaben.

Struktur der Variablen $2 \times \sigma$
bzw. (σ, τ) .

Im ersten Fall Struktur des Vordergliedes gleich der Struktur des Hintergliedes.
Im zweiten Fall verschiedene Strukturen (σ, τ) der Vorder- und Hinterglieder.

Allgemeines Strukturzeichen für Paar:

$$S2 = (\sigma, \tau) ;$$

jedoch meistens ersetzt durch spezielle Zeichen

$$2 \times \sigma \; ; \quad (\sigma, \tau) \; ; \quad 2 \times S1.n \; .$$

Im Falle der Struktur $2 \times S1.n$ können die Operationen von Abschnitt II 4,5) (S.49, 50) auf die einzelnen Glieder des Paares angewandt werden.

1) Allgemeine Pläne.

P2.1 Ein Glied des ersten Paares ist gleich einem Glied des zweiten Paares:

	R(V,	V)	⇒ R
V	o	1	o
S	$2\times\sigma$	$2\times\sigma$	o

(Allgemeine Kohärenz)

	V	= V	∨ V	= V	∨ V	= V	∨ V	= V	⇒ R
V	o	1	o	1	o	1	o	1	o
K	o	o	o	1	1	o	1	1	
S	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	o

P2.2 Gleichheit der Vorder- oder Gleichheit der Hinterglieder:

	R(V ,	V)	⇒ R
	o	1	o
	(σ,τ)	(σ,τ)	o

(Kohärenz bei verschiedener Struktur der Vorder- und Hinterglieder)

	V	= V	∨ V	= V	⇒ R
V	o	1	o	1	o
K	o	o	1	1	
S	σ	σ	τ	τ	o

P2.3 Das eine Paar ist die Spiegelung des anderen:

	R(	V	,	V	)	⇒	R
V		0		1			0
S		2×σ		2×σ			0

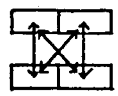
	V	=	V	∧	V	=	V	⇒	R
V	0		1		0		1		0
K	0		1		1		0		
S	σ		σ		σ		σ		0

P2.4 Die Paare sind gleich oder das eine ist die Spiegelung des anderen:

	V	=	V	∨ R2.3(	V	,	V	)	⇒	R
V	0		1	0	0		1			0
S	2×σ		2×σ		2×σ		2×σ			0

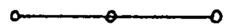
P2.8 Die Beziehung Rx besteht zwischen mindestens einem Glied des ersten und einem Glied des zweiten Paares: (Allgemeine Kohärenz durch Rx)

	(R(Rx))(	V	,	V	)	⇒	R
V		0		1			0
S		2×σ		2×σ			0



	Rx(V,	V) ∨	Rx(V,	V) ∨	Rx(V,	V) ∨	Rx(V,	V) ⇒	R
V	0	1	0	1	0	1	0	1	0
K	0	0	0	1	1	0	1	1	
S	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	0

P2.9 Verkettung.
Ein Glied des ersten Paares gleich einem Glied des zweiten Paares, die anderen ungleich:



	R(	V	,	V	)	⇒	R
V		0		1			0
S		2×σ		2×σ			0

	V ≠	V ∧	V ≠	V ∧ [	(V =	V ∧	V ≠	V) ∨	(V =	V ∧	V ≠	V)]	⇒ R
V	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
K	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0

	∨ (V =	V ∧	V ≠	V) ∨	(V =	V ∧	V ≠	V)
V	0	1	0	1	0	1	0	1
K	1	0	0	1	1	1	0	0

2) <u>Beziehungen zwischen Paaren der Struktur 2 × S1.n , aufgefaßt als durch ~~Sek=~~Zahlen gekennzeichnete Gebiete .</u>

Durch...

a) <u>Aussagen über Paare</u> (Paare ungeordnet):

	R(V	,	V	)	⇒	R
V	0		1			0
S	2×1.n	}	2×1.n			0

P2.16 Die Paare sind in sich geordnet:

```
 |  V ≤ V ∧ V ≤ V   ⇒  R
V|  o   o   1   1      o
K|  o   1   o   1
S|1.n 1.n 1.n 1.n      o
```

P2.17 Die Paare sind in Bezug auf die erste Grenze geordnet:

```
 | R2.16(V , V ) ∧ V  ≤  V  ⇒  R
V|       o   1     o     1     o
K|                 o     o
S|     1.n 1.n   1.n   1.n     o
```

P2.18 Beide Bereiche sind Null:

```
 | V = V ∧ V = V ⇒ R
V| o   o   1   1   o
K| o   1   o   1   o
```

P2.19 Die Gebiete sind getrennt: ├──┤ ├──┤

```
 | Maj(V, V) < Min(V, V) ∨ Min(V, V) < Maj(V, V) ⇒ R
V|     o  o        1  1        o  o        1  1    o
K|     o  1        o  1        o  1        o  1    o
```

P2.20 Die Gebiete schließen aneinander: ├───┼───┤

```
 | R2.9( V ,    V    )  ⇒  R
V|       o      1          o
S|   2x1.n  2x1.n          o
```

P2.21 Die Gebiete überschneiden sich:

```
 | [R1.128(V, V, V) ∧ R1.129(V, V, V)]
V| [o       o  1  1   o       o  1  1]
K| [        o  o  1           1  o  1]
 | [R1.128(V, V, V) ∧ R1.129(V, V, V)]  ⇒  R
V| [o       o  1  1           o  1  1]     o
K| [        1  o  1           o  o  1]
```

P2.22 Das erste Gebiet liegt innerhalb des zweiten:

```
 | Zw(V, V, V) ∧ Zw(V, V, V)  ⇒  R
V|    o  1  1     o  1  1       o
K|    o  o  1     1  o  1
```

P2.23 Das eine Gebiet liegt im anderen:

```
 | R2.22( V ,    V    ) ∨ R2.22( V ,    V    )  ⇒  R
V|        o      1               1      o          o
S|    2x1.n  2x1.n           2x1.n  2x1.n          o
```

P2.24 Die Gebiete haben mehr als einen Punkt gemeinsam:

```
  | V    ≠    V     ∧ R2.19 ( V ,    V   )    ⇒ R
V | o         1               o      1          o
S | 2×1.n  2×1.n            2×1.n 2×1.n         o
```

Andere Form:

```
   R2.21(V, V) ∨ R2.23(V, V)  ⇒  R
         o  1          o  1      o
```

b) <u>Aussagen über geordnete Paare.</u>

Es gilt:

```
  | R2.16( V    ) ∧ R2.16( V    )
V |        o               1
S |      2×1.n           2×1.n
```

Randauszug:

```
  | R( V ,    V     )  ⇒  R
V |    o      1           o
S |   2×1.n 2×1.n         o
B |   R2.16 R2.16
```

P2.32 Die Paare sind einander gleich:

```
  | V = V ∧ V = V ⇒ R
V | o   1   o   1   o
K | o   o   1   1
```

P2.33 Die Gebiete sind getrennt:

```
  | V < V ∨ V < V  ⇒  R
V | o   1   1   o     o
K | 1   o   1   o
```

P2.34 Die Gebiete schließen aneinander an:

```
  | V = V ∨ V = V ⇒ R
V | o   1   1   o   o
K | 1   o   1   o
```

u.s.w. entsprechend S.54.

~~c) Bildung der Extremalwerte :~~

IV. Listenkalkül.

$S3.m = m \times \sigma$

1) Quasistarre Rechenpläne.

Struktur der Resultate nur Funktionen der Gliedzahlen der Ausgangswerte, nicht ihrer eigentlichen Variation. (Vgl. Kap. 1, S. 12).

a) Aussagen über Listen:

P3.0 Zugehörigkeit zu einer Liste:

$$\begin{array}{l|llll} & R(V & ,\ V &) \Rightarrow & R\\ V & 0 & 1 & & 0 \\ S & \sigma & m\times\sigma & & 0\end{array}$$

Abgekürzte Schreibweise: $V_0 \in V_1$ (vgl. Kap. 1, S. 27).

$$W1(N(V)) \left[\begin{array}{llll} V & = V & \Rightarrow & \vee R \\ 0 & 1 & & 0 \\ & i & & \end{array}\right]$$

Randauszug für P3.1 ; P3.2

$$\begin{array}{l|lll} & R(\ V\ ) & \Rightarrow & R\\ V & 0 & & 0 \\ S & m\times\sigma & & 0\end{array}$$

P3.1 Gleichheit sämtlicher Glieder:

Implizite Form:

$$\begin{array}{l|llllllll} & (x) & (x \in & V & \rightarrow x & = & V) & \Rightarrow & R \\ V & & & 0 & & & 0 & & 0 \\ K & & & & & & 0 & & \\ S & \sigma & \sigma & m\times\sigma & \sigma & & \sigma & & 0 \end{array}$$

Explizite Form: $W1(m) \left[\begin{array}{llll} V & = V & \Rightarrow & \wedge R \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & i & & \end{array}\right]$

P3.2 Alle Glieder der Liste sind voneinander verschieden:

Implizite Form:

$$(x)(\bar{E}y)(x \in V_0 \wedge y \in V_0 \wedge I(x) \neq I(y) \rightarrow x \neq y) \Rightarrow R_0$$

Explizite Form:

$$\begin{array}{l|l} & W1(m) \\ V & 0 \\ K & \\ S & \end{array} \left[\begin{array}{l} W3(i+1,\ m) \\ 1 \quad 0 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{llllll} V & i & \neq V & i & \Rightarrow & \wedge R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & & \\ 0 & & 0 & & & \end{array}\right]\right]$$

(Vgl. Kap. 1, S. 23).

Randauszug für P3.4 bis P3.9 .

$$\begin{array}{l|lllll} & (R(R\square))(& V &) & \Rightarrow & R \\ V & & 0 & & & 0 \\ S & & m\times\sigma & & & 0 \end{array}$$

P3.4 Es gibt ein Paar von Gliedern, zwischen denen die Beziehung $R\square$ besteht:

Implizite Form:

$$(Ex)(Ey)\left(x \in \underset{0}{V} \wedge y \in \underset{0}{V} \wedge I(x) \neq I(y) \wedge R\square\,(x,y)\right) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

Explizite Form:

$$\begin{array}{l|l} & W1(m) \left[W1(m) \left[\begin{array}{llllllll} i & \neq & i & \rightarrow R\square & (V \lceil i & , & V \lceil i) & \Rightarrow \vee R \end{array} \right]\right] \\ V & 0 \quad\quad\quad\; 1 \quad\quad\quad\; 0 \quad\; 1 \quad\quad\quad\quad\; 0 \;\; 0 \quad\quad 0 \;\; 1 \quad\quad\quad\; 0 \\ K & \\ S & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1.n \;\; 1.n \quad\quad\quad\quad \sigma \quad\quad\quad\; \sigma \quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

P3.5 Es gibt ein Paar benachbarter Glieder, zwischen denen $R\square$ gilt:

Implizite Form:

$$(Ex)(Ey)\left(x \in \underset{0}{V} \wedge y \in \underset{0}{V} \wedge I(x) + 1 = I(y) \wedge R\square\,(x,y)\right) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

Explizite Form:

$$\begin{array}{l|lllllll} & W1(m-1) & [\; R\square & (V & , & V &) \Rightarrow & \vee R\;] \\ V & & & 0 & & 0 & & 0 \\ K & & & i & & i+1 & & \end{array}$$

P3.6 Zwischen allen Nachbargliedern besteht die Beziehung $R\square$:

$$\begin{array}{l|lllllll} & W1(m-1) & [\; R\square & (V & , & V &) \Rightarrow & \wedge R\;] \\ V & & & 0 & & 0 & & 0 \\ K & & & i & & i+1 & & \end{array}$$

P3.7 Zu jedem Glied gibt es ein anderes, welches zu ihm in der Beziehung $R\square$ steht:

Implizite Form:

$$(x)\left[x \in \underset{0}{V} \rightarrow (Ey)\left[y \in \underset{0}{V} \wedge I(x) \neq I(y) \wedge R\square\,(x,y)\right]\right] \Rightarrow \underset{0}{R}$$

Explizite Form:

$$\begin{array}{l|l} & W1(m) \left[- \Rightarrow Z \;\middle|\; W(m) \left[i \neq i \rightarrow R\square\; (V \lceil i, \; V \lceil i) \Rightarrow Z \right] \middle|\; Z \Rightarrow \wedge R \right] \\ V & 0 \quad\quad\quad\quad\quad\;\; 0 \quad\;\; 1 \quad\quad\quad 0 \;\;\; 1 \quad\quad\quad\quad\;\; 0 \;\; 0 \quad\; 1 \;\; 1 \quad\quad\quad\; 0 \quad\;\; 0 \quad\quad\;\; 0 \\ K & \end{array}$$

P3.8 Zwischen jedem Glied und allen seinen folgenden gilt die Beziehung R□.

Implizite Form:

$$(x)(y)\left[x \in \underset{0}{V} \wedge y \in \underset{0}{V} \wedge I(x) < I(y) \rightarrow R\square\,(x,y)\right]$$

Explizite Form:

$$\begin{array}{l|l} & W1(m)\left[W3(i+1,\ m)\left[R\square\,(V\ulcorner i\ ,\ V\ulcorner i) \Rightarrow \wedge R\right]\right] \\ V & 0 \qquad\ \ 1 \qquad\ 0 \qquad\qquad\quad 0\ \ 0 \qquad 0\ \ 0 \qquad\quad\ 0 \\ K & \end{array}$$

P3.9 Es besteht Kohärenz zwischen sämtlichen Gliedern in Bezug auf die Relation R□ .

Implizite Darstellung mit Hilfe des Prädikats R□'(x,y) „zwischen x und y besteht direkt oder indirekt die Beziehung R□ ."

Rekursive Definition von R□'[*]:

$$R\square(x,y) \vee R\square(y,x) \rightarrow R\square'(x,y)$$

$$R\square'(x,y) \wedge (Ez)\left[R\square(y,z) \vee R\square(z,y)\right] \rightarrow R\square'(x,z)$$

$$(x)(y)\left[x \in \underset{0}{V} \wedge y \in \underset{0}{V} \wedge I(x) \neq I(y) \rightarrow R\square'(x,y)\right]$$

Explizite Form:

$$\begin{array}{l|lll} & V & \Rightarrow & Z \\ V & 0 & & 0 \\ K & 0 & & \\ S & \sigma & & \square\times\sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & W6\left[\begin{array}{lll} Z & \Rightarrow & Z \\ 0 & & 1 \\ 0 & & \\ \sigma & & \sigma \end{array}\right. \\ V & \\ K & \\ S & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & LZ\left[Z\ ,\ \hat{x}\left[x \in V \wedge \overline{x \in z} \wedge R\square(z,x) \vee R\square(x,z)\right]\right] \Rightarrow Z \\ V & \quad\ \ 0 \qquad\qquad\ \ 0 \qquad\quad\ 0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad\qquad 1 \qquad\qquad 0 \\ K & \\ S & \qquad\qquad\quad \sigma\ \ \square\times\sigma \qquad \square\times\sigma \qquad \sigma\ \sigma \qquad\qquad \sigma\ \sigma \qquad\quad \square\times\sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & (x)(x \in V \rightarrow x \in Z) \Rightarrow R \\ V & \qquad\qquad\ \ 0 \qquad\quad\ \ 0 \qquad\quad 0 \\ K & \\ S & \sigma\quad \sigma\quad \square\times\sigma\quad \sigma\quad \square\times\sigma \qquad 0 \end{array}$$

Bedeutung von LZ(x,y) : Längszusammensetzung der Listen x und y . (s.S.66).

(Bedeutung von W6 s. Kap. 1 , S.24,)

b) Operationen mit einer Liste, die wieder eine Liste ergeben:

P3.10 Hinzufügen eines Gliedes:

LZ

$$\begin{array}{c|lllll} & LZ(V\ , & V\ ) & \Rightarrow & R \\ V & \quad 0 & \ 1 & & 0 \\ S & m\times\sigma & \ \sigma & & (m+1)\times\sigma \end{array}$$

Neues Glied zuletzt.

$$\begin{array}{c} \\ V \\ K \end{array} \left| \begin{array}{c} W1(m) \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i \end{array}\right] \right| \begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & R \\ 1 & & 0 \\ & & m \end{array}$$

P3.11

LZ

$$\begin{array}{c|lllll} & LZ\ (V\ , & V\ ) & \Rightarrow & R \\ V & \quad 0 & \ 1 & & 0 \\ S & \quad \sigma & m\times\sigma & & (m+1)\times\sigma \end{array}$$

Neues Glied zuerst.

$$\begin{array}{c} \\ V \\ K \end{array} \left| \begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & \mu R \\ 0 & & 0 \\ & & \end{array} \right| \begin{array}{c} W \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc} \mu V & \Rightarrow & \mu R \\ 1 & & 0 \\ & & \end{array}\right]$$

P3.12 Einschieben des Gliedes V_1 an der Stelle V_2 in der Liste V_0:

$$\begin{array}{c|llllll} & R(V\ , & V\ , & V\ ) & \Rightarrow & R \\ V & \quad 0 & 1 & 2 & & 0 \\ S & m\times\sigma & \sigma & 1.n & & (m+1)\times\sigma \end{array}$$

Bedingung:
$0 \leq V_2 \leq m$

$$\begin{array}{c} \\ V \\ K \end{array} \left| \begin{array}{c} W1(V) \\ 2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i \end{array}\right] \right| \begin{array}{cccc} V & \Rightarrow & R & V \\ 1 & & 0 & 2 \\ & & & \end{array} \left| \begin{array}{c} W3(V\ ,\ m) \\ 2 \qquad \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i+1 \end{array}\right] \right.$$

P3.13 Ersetzen des Gliedes der Stelle V_2 durch das Glied V_1 in der Liste V_0:

$$\begin{array}{c|llllll} & R(V\ , & V\ , & V\ ) & \Rightarrow & R \\ V & \quad 0 & 1 & 2 & & 0 \\ S & m\times\sigma & \sigma & 1.n & & m\times\sigma \end{array}$$

Bedingung:
$0 \leq V_2 < m$

$$\begin{array}{c} \\ V \\ K \end{array} \left| \begin{array}{c} W1(V) \\ 2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i \end{array}\right] \right| \begin{array}{cccc} V & \Rightarrow & R & V \\ 1 & & 0 & 2 \\ & & & \end{array} \left| \begin{array}{c} W3(V+1, m) \\ 2 \qquad \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i \end{array}\right] \right.$$

Andere Darstellung:

$$\begin{array}{c} \\ V \\ K \\ S \end{array} \left| \begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & Z \\ 0 & & 0 \\ & & \\ m\times\sigma & & m\times\sigma \end{array} \right| \begin{array}{cccc} V & \Rightarrow & Z & V \\ 1 & & 0 & 2 \\ & & & \\ & & \sigma & 1.n \end{array} \left| \begin{array}{ccc} Z & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ & & \\ m\times\sigma & & m\times\sigma \end{array} \right.$$

P3.14 Streichen des Gliedes der Stelle $\underset{1}{V}$ in der Liste $\underset{0}{V}$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & R(& V, & V &) & \Rightarrow & R \\ V & & 0 & 1 & & & 0 \\ S & & m\times\sigma & 1.n & & & (m-1)\times\sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & W1(V) & \\ V & 1 & \\ K & & \end{array} \left[\begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i \end{array}\right] \Bigg| \begin{array}{c} W3(V,\ m-1) \\ 1 \\ \ \end{array} \left[\begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i+1 & & i \end{array}\right]$$

P3.15 Spaltung einer Liste: Voraussetzung ist, daß die Struktur σ des einzelnen Listengliedes in Komponenten zerlegbar ist.

Sp

$$K\varkappa(\sigma) = \tau$$

„Die Komponente $\varkappa$ von σ hat die Struktur τ."

$$\begin{array}{c|ccc} & Sp\,\varkappa(V) & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 0 \\ S & m\times\sigma & & \tau \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & W1(m) \\ V & \\ K & \\ S & \end{array} \left[\begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i.\varkappa & & i \\ \tau & & \tau \end{array}\right]$$

P3.16 Umkehrung der Reihenfolge:

$$\begin{array}{c|ccc} & R\ (V) & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 0 \\ S & m\times\sigma & & m\times\sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & W1(m) \\ V & \\ K & \\ S & \end{array} \left[\begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & m-1-i \\ \sigma & & \sigma \end{array}\right]$$

c) <u>Rechenpläne mit Ordnungsbeziehungen.</u>

Anwendbar auf Listen mit Gliedern, für deren Struktur die Relation $x < y$ definiert ist. (x kleiner als y, bzw. x kommt vor y). Z.B. S1.n (s.S.50).

P3.24

$$\begin{array}{c|ccc} & Min\ (V) & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 0 \\ S & m\times\sigma & & \sigma \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} \text{Implizite Form:} \\ \mu x \left[x \in \underset{0}{V} \wedge (y)(y \in \underset{0}{V} \rightarrow x \leq y) \right] \Rightarrow \underset{0}{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & V & \Rightarrow & Z & W1(m) \\ V & 0 & & 0 & \\ K & 0 & & & \\ S & \sigma & & \sigma & \end{array} \left[\begin{array}{cccc} Min(Z, & V) & \Rightarrow & Z \\ 0 & 0 & & 0 \\ & i & & \\ \sigma & \sigma & & \sigma \end{array}\right] \Bigg| \begin{array}{ccc} Z & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ & & \\ \sigma & & \sigma \end{array}$$

P3.25

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathrm{Max} & (V) & \Rightarrow & R \\ V & & 0 & & 0 \\ S & & m\times\sigma & & \sigma \end{array} \qquad \text{Implizite Form:} \quad \begin{array}{c} \mu x \left[x \in \underset{0}{V} \wedge (y)(y \in \underset{0}{V} \rightarrow x \geqslant y) \right] \Rightarrow \underset{0}{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c|ccccc|ccc} & 0 & \Rightarrow & Z & W1(m) & \mathrm{Maj}(Z, & V) & & \Rightarrow & Z & Z & \Rightarrow & R \\ V & & & 0 & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & 0 \\ K & & & & & & i & & & & & & \\ S & \sigma & & \sigma & & \sigma & \sigma & & & \sigma & \sigma & & \sigma \end{array}$$

P3.26 Aussage: „Die Liste $\underset{0}{V}$ ist geordnet."

Ord 0

$$\begin{array}{c|cccccc} & (R3.8 & (R1.72)) & (V) & \Rightarrow & R \\ V & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ S & & & 1.m & & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Prädikatzeichen:} \\ \mathrm{Ord}\ 0\ (\underset{0}{V}) \end{array}$$

Implizite Form:

$$(x)(y)\left[x \in \underset{0}{V} \wedge y \in \underset{0}{V} \wedge I(x) < I(y) \rightarrow x \leqslant y \right] \Rightarrow \underset{0}{R}$$

Es gilt dann auch:

$$(x)(y)\left[x \in \underset{0}{V} \wedge y \in \underset{0}{V} \wedge I(x) + 1 = I(y) \rightarrow x \leqslant y \right] \Rightarrow \underset{0}{R}$$

Dies ist identisch mit: $\left(\underset{0}{R3.6}(R1.72)\right)(\underset{0}{V}) \Rightarrow \underset{0}{R}$

Explizite Form:

$$W1\left(N(\underset{0}{V})-1\right) \left[\begin{array}{ccccc} V & \leqslant & V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 & & 0 \\ i & & i+1 & & \end{array} \right]$$

P3.27 Ordnung einer Liste. Kleinere Glieder zuerst:

Ord 1

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathrm{Ord}\ 1 & (V) & \Rightarrow & R \\ V & & 0 & & 0 \\ S & & m\times\sigma & & m\times\sigma \end{array}$$

Zur impliziten Darstellung brauchen wir zunächst einen Ausdruck dafür, daß zwei Listen aus den gleichen Gliedern bestehen, wobei die Ordnung der Glieder verschieden sein kann. Wir führen hierfür folgendes Zeichen ein:

$$\begin{array}{c|ccc} & V & \ominus & V \\ V & 0 & & 1 \\ S & m\times\sigma & & m\times\sigma \end{array}$$

Definition von $\ominus$:

$$\underset{0}{V} \ominus \underset{1}{V} = Df\ (x)\left[x \in \underset{0}{V} \rightarrow \left[N\left[\hat{\hat{y}}(y \in \underset{0}{V} \wedge y = x) \right] = N\left[\hat{\hat{y}}(y \in \underset{1}{V} \wedge y = x) \right] \right] \right]$$

Dementsprechend ergibt sich folgender impliziter Ansatz für P3.27 :

$$\acute{x}\left(x \ominus \underset{0}{V} \wedge \mathrm{Ord}\ 0(x)\right) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

Es wird folgendes Verfahren angewandt: Die Ordnung erfolgt abschnittweise durch Ordnung der Glieder 0 bis i. Ist die Liste bis zum Gliede i geordnet, so erfolgt die Bildung der bis Glied i+1 geordneten Liste durch Einordnen des Gliedes i+1 in die bereits geordnete Liste wie folgt: das Glied i+1 wird herausgegriffen und gleich Z_1 gesetzt. Z_1 wird nun fortlaufend mit den Gliedern ε, beginnend mit $\varepsilon = i$, verglichen. Ist Z_1 kleiner als das Glied ε, so ergibt dieses das neue Glied $\varepsilon+1$, und ε wird um 1 erniedrigt. Andernfalls ergibt Z_1 das neue Glied $\varepsilon+1$ und der Einordnungsvorgang des Gliedes i+1 ist beendet. Ist das einzuordnende Glied kleiner als alle anderen Glieder bis i, so wird $\varepsilon = -1$. In diesem Falle ergibt es das neue Glied 0.

Z_0 ist die laufend umzubildende Liste. Ihr Anfangswert ist gleich V_0, ihr Endwert gleich R_0.

Die Variation des übergeordneten W-Planes muß von $i = 0$ bis $i = m-2$ laufen. (m-1 ist der höchste Index.) Am Anfang ist die Liste bis Glied $i = 0$ geordnet. Das erste einzuordnende Glied ist also das Glied i+1. Bei der letzten Variation muß gelten $i+1 = m-1$, also $i = m-2$. Entsprechend Vorschrift Kap. 1, S. 23 lautet die entsprechende Variationsvorschrift:

W1(m-1)

```
P3.27 |    Ord 1( V  )  =>  R
      |           o         o
      |          m×σ       m×σ
      |
      | |  V  =>  Z
      |V|  o      o
      |S| m×σ    m×σ
      |
      | | W1(m-1) [ Z    =>  Z | i  =>  ε                                       ]
      |V|         | o        1 |                                                |
      |K|         |i+1         |                                                |
      |S|         | σ        σ |1.n    1.n                                      |
      | |         |  W [ ε >= 0 -> [ Z < Z  -> [ Z => Z   | ε -1 => ε ]]]       |
      |V|         |    |            1    o      o    o    |           |||       |
      |K|         |    |                 ε      ε   ε+1   |           |||       |
      |S|         |    |            σ    σ      σ    σ    |           ]||       |
      | |         |    |            _______                           ]||       |
      | |         |    |            Z < Z   -> [ Z => Z   |  Fin³     |||       |
      |V|         |    |            1   o        1    o   |           |||       |
      |K|         |    |                ε            ε+1  |           |||       |
      |S|         |    [            σ   σ        σ    σ   |           ]]]       |
      | |         |  ε  =  -1  -> [ Z => Z ]                                    |
      |V|         |                 1    o                                      |
      |K|         |                      o                                      |
      |S|         [1.n    1.n      [σ    σ ]                                    ]
```

$$\begin{array}{c|cc} & Z & \Rightarrow\; R \\ V & 0 & \;\;\; 0 \\ S & m\times\sigma & \;\;\; m\times\sigma \end{array}$$

P3.28 | $\mathrm{Ord}\;2\;(\underset{0}{V}) \Rightarrow \underset{0}{R}$ — Wie P3.27. Größte Werte zuerst. $>$ anstelle von $<$.

Beispiel für P3.27 $\qquad \underset{0}{V} = (3,\ 2,\ 1,\ 7)$

i		Z_0: 0	1	2	3	Z_1
0	0	3	2	1	7	2
0	−1	3	3	1	7	2
1	1	2	3	1	7	1
1	0	2	3	3	7	1
1	−1	2	2	3	7	1
2	2	1	2	3	7	7
		1	2	3	7	

d) <u>Anzahlkriterium:</u> $N(\underset{0}{V})$ = Anzahl der Glieder der Liste $\underset{0}{V}$.

P3.29 | $$\big(N(R\,\square)\big)(\underset{0}{V}) \equiv N\big(\hat{x}(x \in V \wedge R\,\square(x))\big)$$

Expliziter Ansatz:

$$0 \Rightarrow \varepsilon$$

$$W1\big(N(\underset{0}{V})\big)\left[R\,\square\,(\underset{\substack{0\\ i}}{V}) \rightarrow (\varepsilon + 1 \Rightarrow \varepsilon) \right] \;\Big|\; \varepsilon \Rightarrow \underset{0}{R}$$

P3.30 | Anzahl der voneinander verschiedenen Glieder:

$$R(\underset{\substack{0\\ m\times\sigma}}{V}) \Rightarrow \underset{\substack{0\\ 1.n}}{R}$$

$$N\big(\hat{x}(x \in \underset{0}{V})\big) \Rightarrow \underset{0}{R}$$

Explizite Form:

```
  |  V    ⇒     Z  | m    ⇒    ε
V |  o          o  |           2
S | m×σ       □×σ  |1.n       1.n

  | W ⎡ ε ≠ O→⎡ Z ⇒ Z  | O   ⇒   ε  | O   ⇒   ε                    ⎤⎤
V |   ⎢ 2     ⎢ o   2  |         o  |         1                    ⎥⎥
K |   ⎢       ⎢ o      |            |                              ⎥⎥
S |   ⎢ 1.n   ⎢ σ   σ  |1.n    1.n  |1.n    1.n                    ⎥⎥
  |   ⎢       ⎢W3(1,ε) ⎡ Z = Z →(ε + 1 ⇒ ε)                      ⎤ ⎥⎥
V |   ⎢       ⎢     2  ⎢ 2   o    o       o                      ⎥ ⎥⎥
K |   ⎢       ⎢        ⎢     i                                   ⎥ ⎥⎥
S |   ⎢       ⎢        ⎢ σ   σ                                   ⎥ ⎥⎥
  |   ⎢       ⎢        ⎢ ‾Z = Z‾ →⎡Z ⇒ Z ┌ ε | ε + 1 ⇒ ε⎤      ⎥ ⎥⎥
V |   ⎢       ⎢        ⎢ 2   o    ⎢o   1 ┘ 1 | 1         1⎥      ⎥ ⎥⎥
K |   ⎢       ⎢        ⎢     i    ⎢i         |            ⎥      ⎥ ⎥⎥
S |   ⎢       ⎢        ⎣ σ   σ    ⎣σ   σ     |            ⎦      ⎦ ⎥⎥
  |   ⎢       ⎢(Z, ε) ⇒ μR | ε ⇒ ε | Z ┌(ε×σ) ⇒ Z ┌(ε×σ)          ⎥⎥
V |   ⎢       ⎢ 2  o      o| 1   2 | 1 ┘ 2      o ┘ 2            ⎥⎥
K |   ⎢       ⎢            |       |                             ⎥⎥
S |   ⎣       ⎣ σ         σ|1.n 1.n|                             ⎦⎦
```

e) Aussagen über zwei Listen:

Randauszug für P3.32 bis P3.36

```
  | R( V ,  V ) ⇒ R
V |    o    1     o
S |   m×σ  n×σ    o
```

~~[V·m = n]~~

P3.32 Gleichheit beider Listen:

```
  |  V  =  V  ⇒  R
V |  o     1     o
S | m×σ   m×σ    o

  | W1(m) ⎡ V = V ⇒ ∧R ⎤
V |       ⎢ o   1     o⎥
K |       ⎣ i   i      ⎦
```

P3.33 Gleiche Zusammensetzung:

```
  |  V  ⊖  V  ⇒  R            (s. auch S.61.)
V |  o     1     o
S | m×σ   m×σ    o

     Ord 1 (V) = Ord 1 (V) ⇒ R
            o           1 ,  o
```

P3.34 Es gibt mindestens ein Glied, welches in beiden Listen auftritt:

Implizite Form:

$$(Ex)(x \in V_0 \wedge x \in V_1) \Rightarrow R_0$$

Explizite Form:

$$\mathrm{W1}(m)_0 \left[\mathrm{W1}(n)_1 \left[V_0 \rfloor i_0 = V_0 \rfloor i_1 \Rightarrow \vee R_0 \right] \right]$$

P3.35 Zu jedem Glied der ersten Liste gibt es ein gleiches in der zweiten Liste. (Jedoch können Reihenfolge und Zahl der Wiederholungen verschieden sein.):

Implizite Form:

$$(x) \left[x \in V_0 \rightarrow x \in V_1 \right] \Rightarrow R_0$$

Durch Anwendung der Regeln von Kap. 1, S. 23,25 ergibt sich zunächst folgender Ansatz:

$$+ \Rightarrow Z_0 \Big| \mathrm{W1}(m) \left[- \Rightarrow Z_1 \Big| \mathrm{W1}(n) \left[V_0 \rfloor i_0 = V_1 \rfloor i_1 \vee Z_1 \Rightarrow Z_1 \right] \Big\| Z_0 \wedge Z_1 \Rightarrow Z_0 \right]$$

$$Z_0 \Rightarrow R_1$$

Dieser läßt sich nach Regel von Kap. 1, S. 38 wie folgt vereinfachen:

$$\mathrm{W1}(m) \left[- \Rightarrow Z_1 \Big| \mathrm{W1}(n) \left[V_0 \rfloor i_0 = V_1 \rfloor i_1 \Rightarrow \vee Z_1 \right] \Big\| Z_1 \Rightarrow \wedge R_0 \right]$$

P3.36 Alle Glieder der ersten Liste sind auch in der zweiten Liste enthalten und umgekehrt:

Impliziter Ansatz: $\mathrm{Ord}\ 1\ (V_0) \ominus \mathrm{Ord}\ 1\ (V_1) \Rightarrow R_0$

bzw. $\mathrm{R3.35}\ (V_0,\ V_1) \wedge \mathrm{R3.35}\ (V_1,\ V_0) \Rightarrow R_0$

Ansatz läßt sich vereinfachen. Hier nicht besprochen.

f) Aussagen über zwei Listen in Bezug auf eine Relation R□:

Randauszug für P3.40 bis P3.44

```
 | (R(R□))( V ,  V )  ⇒  R        ~~Ev - m = n~~
V|          o    1       o
S|         m×σ  n×σ      o
```

P3.40 Zwischen je zwei der Reihenfolge nach entsprechenden Gliedern besteht die Relation R□. (m = n)
(Die Listen sind durch R□ aufeinander abbildbar ohne Änderung der Reihenfolge):

```
 | W1(m) [R□ (V, V) ⇒ ∧ R]
V|       [     o  1     o]
K|       [     i  i      ]
```

P3.41 Die Listen sind mit Hilfe der Relation R□ durch Änderung der Reihenfolge aufeinander abbildbar:

```
R3.40(Ord 1(V) , Ord 1(V)) ⇒ R
o           o          1     o
```

P3.42
P3.43
P3.44 Entsprechend P3.34 , P3.35 , P3.36

Jedoch anstelle der Relation = die Relation R□.

g) Bildung einer neuen Liste aus zwei gegebenen:

P3.48 Querzusammensetzung zweier Listen gleicher Gliedzahl. Die Glieder mit gleichem Index werden vereinigt:

Qz

```
 | Qz( V ,  V )  ⇒   R
V|     o    1        o
S|    m×σ  m×τ     m×(σ,τ)

 | W1(m) [(V, V) ⇒ R    ]
V|       [ o  1    o    ]
K|       [ i  i    i    ]
S|       [ σ  τ  (σ,τ)  ]
```

P3.49 Längszusammensetzung zweier Listen, deren Glieder von gleicher Struktur sind:

Lz

```
 | Lz( V ,  V )  ⇒   R
V|     o    1        o
S|    m×σ  n×σ    (m+n)×σ

 | W1(m) [V ⇒ R] | W1(n) [V ⇒  R  ]
V|       [o   o] |       [1    o  ]
K|       [i   i] |       [i   m+i ]
S|       [σ   σ] |       [σ       ]
```

Das Operationszeichen Lz ist auch auf mehr als zwei Listen bzw. auf einzelne Variable anwendbar (vgl. S.59).

```
Lz( V  ,  V  ,  ... ,  V  )
    o     1            n
   □×σ   □×σ          □×σ
```

P3.50 — Querzusammensetzung mit einer Konstanten; Konstante zuerst:

Qz

```
  | Qz(V,   V )  ⇒  R
V |    o    1       o
S |    σ   m×τ     m×(σ,τ)

  | W1(m) ⎡ (V,  V)  ⇒  R  ⎤
V |       ⎢  o   1      o  ⎥
K |       ⎢      i      i  ⎥
S |       ⎣  σ   τ    (σ,τ)⎦
```

P3.51 — Querzusammensetzung mit einer Konstanten; Konstante an zweiter Stelle:

Qz

```
  | Qz( V  , V)  ⇒  R
V |     o    1      o
S |    m×σ   τ    (σ,τ)

  | W1(m) ⎡ (V,  V)  ⇒ R  ⎤
V |       ⎢  o   1     o  ⎥
K |       ⎢  i   .     i  ⎥
S |       ⎣  σ   τ   (σ,τ)⎦
```

Das Operationszeichen Qz ist ebenfalls auf beliebig viele Listen gleicher Gliedzahl bzw. einzelne Variable anwendbar.

```
Qz( V    ,  V    ,  V    , ... ,  V   )
    o       1       2             n
   m×σ0    m×σ1    m×σ2          m×σn
```

P3.52 — <u>Nummerierung der Glieder:</u>

Nr

```
  | Nr( V )   ⇒  R
V |     o        o
S |    m×σ     m(1.n, σ)

  | W1(m) ⎡ ( i ,  V  ) ⇒ R        ⎤
V |       ⎢        o      o        ⎥
K |       ⎢        i      i        ⎥
S |       ⎣  1.n   σ    (1.n, σ)   ⎦
```

Beispiele für Lz, Qz und Nr.

$$V_0 = (13,\ 24,\ 01,\ 53)$$
$$V_1 = (12,\ 17)$$
$$V_2 = (03,\ 13,\ 12)$$
$$Lz(V_0, V_1) = (13,\ 24,\ 01,\ 53,\ 12,\ 17)$$
$$Lz(V_1, V_0) = (12,\ 17,\ 13,\ 24,\ 01,\ 53)$$
$$Lz(V_0, V_1, V_2) = (13,\ 24,\ 01,\ 53,\ 12,\ 17,\ 03,\ 13,\ 12)$$

$$V_0 = (a,\ c,\ b,\ f)$$
$$V_1 = (7,\ 5,\ 3,\ 1)$$
$$V_2 = (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$$
$$Qz(V_0, V_1) = (a7,\ c5,\ b3,\ f1)$$
$$Qz(V_2, V_1) = (\alpha 7,\ \beta 5,\ \gamma 3,\ \delta 1)$$
$$Qz(V_0, V_2, V_1) = (a\alpha 7,\ c\beta 5,\ b\gamma 3,\ f\delta 1)$$

$$V_3 = a$$
$$Qz(V_3, V_0) = (aa,\ ac,\ ab,\ af)$$
$$Qz(V_2, V_3) = (\alpha a,\ \beta a,\ \gamma a,\ \delta a)$$
$$Nr(V_0) = (0a,\ 1c,\ 2b,\ 3f)$$

2) Freier Listenkalkül.

(Die Ergebnisse sind Listen variablen Umfangs.)

P3.64 $\hat{x}(x \in \underset{0}{V} \wedge R\square(x)) \Rightarrow \underset{0}{R}$

P3.65 $\hat{\hat{x}}(x \in \underset{0}{V} \wedge R\square(x)) \Rightarrow \underset{0}{R}$

$\left.\right\}$ s. Kap. 1, S. 29, 30

P3.66 Teilliste von $i = 0$ bis $i = \underset{1}{V}$:

$$\begin{array}{c|llllllll} & Tl\,1(& V & , & V &) & \Rightarrow & R & (V+1)\times\sigma \\ V & & 0 & & 1 & & & 0 & \quad 1 \\ S & & m\times\sigma & & 1.n & & & & \end{array}$$

Implizite Form: $\hat{\hat{x}}(x \in \underset{0}{V} \wedge I(x) \leq \underset{1}{V}) \Rightarrow \underset{0}{R}$

Explizite Form: $\underset{1}{W1(V+1)} \begin{bmatrix} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i \end{bmatrix}$

P3.67 Teilliste von $i = \underset{1}{V}$ bis $i = m-1$:

$$\begin{array}{c|llllllll} & Tl\,2(& V & , & V &) & \Rightarrow & R & (m-V)\times\sigma \\ V & & 0 & & 1 & & & 0 & \quad\;\; 1 \\ S & & m\times\sigma & & 1.n & & & & \end{array}$$

Implizite Form: $\hat{\hat{x}}(x \in \underset{0}{V} \wedge I(x) \geq \underset{1}{V}) \Rightarrow \underset{0}{R}$

Explizite Form: $W3(\underset{1}{V}, m) \begin{bmatrix} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i \end{bmatrix}$

P3.68 Anzahlbestimmungen der gleichen Glieder:

$$\begin{array}{lcl} R(V) & = & R \\ \;\;\;0 & & 0 \\ m\times\sigma & & \square\times(\sigma, 1.n) \end{array}$$

Implizite Form: $\hat{x}(x \in \underset{0}{V}) \Rightarrow Sp\,0\,(\underset{0}{R})$

$$\begin{array}{c|l} & (x)\left[x \in \underset{0}{R} \rightarrow \underset{1}{x} = N\left[\hat{\hat{y}}(y \in \underset{0}{V} \wedge y = \underset{0}{x})\right]\right] \\ V & \\ K & \end{array}$$

Explizite Form:

$$\begin{array}{c|llllllllllll} & W1(N(Z)) & \Big[N\big[\hat{\hat{x}}(x & \in & V & \wedge & x = & Z)\big] & \Rightarrow & Z \Big] & Qz(Z, & Z) & \Rightarrow & R \\ V & \quad\;\; 0 & & & 0 & & & 0 & & 1 & 0 & 1 & & 0 \\ K & & & & & & & i & & i & & & & \\ S & \quad\;\; \square\times\sigma & 1.n & & \sigma & & m\times\sigma & \sigma & & 1.n & \sigma & 1.n & & \square\times(\sigma, 1.n) \end{array}$$

Hierin bedeutet: $\underset{0}{Z} = Sp\,0\,(\underset{0}{R})$ = Liste der in $\underset{0}{V}$ enthaltenen Glieder (ohne Wiederholungen).

$\underset{1}{Z} = Sp\,1\,(\underset{0}{R})$ = Angabe, wie oft das betreffende Glied in $\underset{0}{V}$ enthalten ist.

Beispiel: $\underset{0}{V} = (14, 13, 1, 14, 1, 1, 9, 4)$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 14,2 \\ 13,1 \\ 1,3 \\ 9,1 \\ 4,1 \end{bmatrix}$$

P3.69 Zusammenfassen der durch die Relation R□ kohärenten Glieder.

Die zusammenhängenden Glieder werden je in einer Gruppe zusammengestellt. Die Gruppen werden nummeriert und die Glieder durch die Gruppennummer ergänzt.

$$\begin{array}{c|ccc} & R(V) & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 0 \\ S & m\times\sigma & & \square\times(\sigma,1.n) \end{array}$$

Vgl. P3.9, S.58.

Bedeutung der Zwischenwerte:

Z_0 Aufbauliste der jeweils untersuchten Gruppe

Z_1 Glied, welches jeweils auf Kohärenz mit anderen untersucht wird

Z_2 Aufbauliste des Resultats

Z_3 Restliste der noch nicht in Gruppen eingeteilten Glieder

ε Gruppennummer

P3.69

$$\begin{array}{l|llll|lll} & V & \Rightarrow & Z & & \phi & \Rightarrow & Z \\ V & 0 & & 3 & & & & 2 \\ S & m\times\sigma & & \square\times\sigma & & & & \square\times(\sigma,1.n) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|lll|lll} & W6 & Z & \Rightarrow & Z & 0 & \Rightarrow & \varepsilon \\ V & & 3 & & 0 & & & \\ K & & 0 & & & & & \\ S & & \sigma & & \square\times\sigma & & & 1.n \end{array}$$

$$\begin{array}{l|llll} & W6 & Z & \Rightarrow & Z \\ V & & 0 & & 1 \\ K & & 0 & & \\ S & & \sigma & & \sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & Lz \left[Z \;,\; \hat{x}\left(x \in Z \wedge \overline{x \in Z} \wedge R\square(Z,x) \vee R\square(x,Z)\right) \Rightarrow Z \right] \\ V & \quad 0 \qquad\qquad\quad 3 \qquad\quad 0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad\qquad 1 \qquad\qquad 0 \\ S & \quad \square\times\sigma \quad \sigma \quad \square\times\sigma \quad \sigma \quad \square\times\sigma \quad \sigma \;\; \sigma \qquad \sigma \;\; \sigma \qquad \square\times\sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} & Lz\left(Z \;,\; Qz(Z \;,\; \varepsilon)\right) \Rightarrow Z & \varepsilon+1 \Rightarrow \varepsilon \\ V & \quad 2 \qquad\qquad\quad 0 \qquad\qquad\qquad 2 & \\ S & \square\times(\sigma,1.n) \quad \square\times\sigma \;\; 1.n \quad \square\times(\sigma,1.n) & 1.n \qquad 1.n \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & \hat{x}\left(x \in Z \wedge \overline{x \in Z}\right) \Rightarrow Z \\ V & \qquad\quad 3 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 3 \\ S & \quad \sigma \quad \square\times\sigma \quad \sigma \quad \square\times\sigma \quad \square\times\sigma . \end{array}$$

$$\begin{array}{l|lll} & Z & \Rightarrow & R \\ V & 2 & & 0 \\ S & \square\times(\sigma,1.n) & & \square\times(\sigma,1.n) \end{array}$$

Beispiel: $V_0 = (3, 5, 7, 15, 4, 9, 16, 5, 3, 3)$

$R\square(x,y) \equiv |x - y| \leq 2$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 3, & 0 \\ 5, & 0 \\ 7, & 0 \\ 4, & 0 \\ 15, & 1 \\ 16, & 1 \\ 9, & 2 \end{bmatrix}$$

Gruppe 0 = (3, 5, 7, 4)

Gruppe 1 = (15, 16)

Gruppe 2 = (9)

P3.70 Vereinigung zweier Listen:

$$\begin{array}{l|lllll} & V & \cup & V & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 1 & & 0 \\ S & m\times\sigma & & n\times\sigma & & \square\times\sigma \end{array}$$

$$\hat{x}(x \in V_0 \vee x \in V_1) \Rightarrow R_0$$

P3.71 Durchschnitt zweier Listen:

$$\begin{array}{c|ccc} & V & \cap \; V & \Rightarrow R \\ V & 0 & 1 & 0 \\ S & m\times\sigma & n\times\sigma & \square\times\sigma \end{array}$$

$$\hat{x}(x \in V_0 \wedge x \in V_1) \Rightarrow R_0$$

Zu beachten:

Im Listenkalkül gilt das kommutative Gesetz für die Operation $\cup$ und $\cap$ nicht.

Es gilt also <u>nicht allgemein:</u>

$$V_0 \cup V_1 = V_1 \cup V_0$$

$$V_0 \cap V_1 = V_1 \cap V_0$$

Die beiden Fälle unterscheiden sich durch die Reihenfolge der Zeichen. Nach Kap. 1, S. ist für die Reihenfolge die erste Liste maßgebend.

Es gilt jedoch allgemein:

$$V_0 \cup V_1 \ominus V_1 \cup V_0 \qquad \text{(vgl. S.61, 64)}$$

$$V_0 \cap V_1 \ominus V_1 \cap V_0$$

Beispiel: $V_0 = (1,3,3,7,3,2,1,5)$, $V_1 = (1,5,5,6,8,2,3)$

$V_0 \cup V_1 = (1,3,7,2,5,6,8)$, $V_1 \cup V_0 = (1,5,6,8,2,3,7)$

$V_0 \cap V_1 = (1,3,2,5)$, $V_1 \cap V_0 = (1,5,2,3)$

V. Rechenpläne mit Paarlisten.

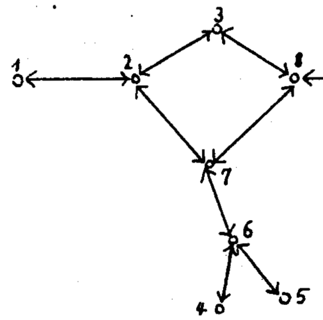
(Relationenkalkül).

1) <u>Allgemeines.</u>

Unter einer Relation versteht man in der Logistik ein zweistelliges Prädikat, z.B. $a < b$. In der allgemeinen Darstellung kann eine Relation durch ein Operationszeichen?$^{R}_{\cdot}$(<) oder durch ein Prädikatzeichen dargestellt werden. (Z.B. Verb(a,b) $\equiv$ a ist mit b verbunden).
In der speziellen Darstellung kann man hauptsächlich drei Fälle unterscheiden.

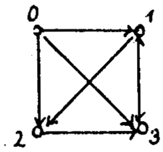
a) Zeichnerische Darstellung durch eine Pfeilfigur:

Beispiel: Pol x ist leitend verbunden mit Pol y:



Da es sich um eine symmetrische Relation handelt, erhält die Relation nur Doppelpfeile.

Die Relation $a < b$ sieht für den Wertbereich 0, 1, 2, 3 wie folgt aus:



b) Darstellung durch Matrix:

Für die beiden Beispiele unter a) sehen die Matrix-Darstellungen wie folgt aus:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+	+								
2	+	+	+				+			
3		+	+					+		
4				+		+				
5					+	+				
6				+	+	+	+			
7		+				+	+	+		
8			+				+	+	+	
9								+	+	+
10									+	+

	0	1	2	3
0		+	+	+
1			+	+
2				+
3				

Die Matrix der symmetrischen Relation ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen.

c) Darstellung durch Paarliste:

Die Paarliste besteht in der Aufzählung der Gliederpaare, zwischen denen die Relation gilt. Für die beiden behandelten Beispiele lauten die Paarlisten wie folgt:

1 - 2	0 - 1
2 - 1	0 - 2
2 - 3	0 - 3
3 - 2	1 - 2
3 - 8	1 - 3
8 - 3	2 - 3
8 - 9	
9 - 8	
9 -10	
10 - 9	
2 - 7	
7 - 2	
7 - 8	
8 - 7	
7 - 6	
6 - 7	
4 - 6	
6 - 4	
4 - 5	
5 - 4	

Da die Relation „leitend verbunden mit" allgemein symmetrisch ist (sofern man von Gleichrichtern absieht), so können die doppelten Aufzählungen durch die einfachen ersetzt werden:

1 - 2
2 - 3
3 - 8
8 - 9
9 -10
2 - 7
7 - 8
7 - 6
4 - 6
4 - 5

Die Darstellung als Paarliste ist der Rechnung am besten zugänglich. Es wird daher zunächst allgemein die Theorie der Paarlisten behandelt.

Das allgemeine Strukturzeichen für Paarlisten ist S.4 .

$$S.4 \quad = \quad m\times(\sigma, \tau) \; .$$

Die erste Komponente eines Paares wird als Vorderglied, die zweite als Hinterglied bezeichnet. Allgemein können die Vorderglieder andere Struktur aufweisen, als die Hinterglieder. Bei symmetrischen Relationen gilt jedoch: $\sigma = \tau$ und wir haben die Struktur $m \times 2 \times \sigma$.

Auf Paarlisten können zunächst ganz allgemein die Rechenpläne des Listenkalküls angewandt werden, wobei das Glied der Liste mit dem Paar der Paarliste identisch ist.

So besagt z.B. der Ausdruck

$$\begin{array}{c|ccc} & V & \ominus & V \\ V & 0 & & 1 \\ S & 4 & & 4 \end{array} ,$$

daß $\underset{0}{V}$ und $\underset{1}{V}$ dieselbe Relation, ~~nur~~ jedoch in verschiedener Reihenfolge der Glieder darstellen.

2) <u>Aussagen über Paarlisten.</u> (S. auch unter 5) S.81.)

a) Vorder- und Hinterglieder haben gleiche Struktur:

Randauszug für P4.1 bis P4.10

$$\begin{array}{c|cccc} & R(& V &) \Rightarrow & R \\ V & & 0 & & 0 \\ S & & m \times 2 \times \sigma & & 0 \end{array}$$

P4.1 Zusammenhang sämtlicher Paare:

$$\begin{array}{c|cccc} & (R3.9 & (R2.8))(& V &) \Rightarrow R \\ V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & & & m \times 2 \times \sigma & 0 \end{array}$$

Zu einer Paarliste, auf welche $\underset{0}{R4.1}$ zutrifft, gehört eine in allen Gliedern zusammenhängende Pfeilfigur (z.B. Figuren von S.73).

P4.2 Die Liste enthält symmetrische Paare:

$$\begin{array}{c|cccccccc} & (Ex)(& x & \epsilon & V & \wedge & x = & x) & \Rightarrow R \\ V & & & & 0 & & & & 0 \\ K & & & & & & 0 & 1 & \\ S & & 2 \times \sigma & & m \times 2 \times \sigma & & \sigma & \sigma & 0 \end{array}$$

P4.3 Die Liste enthält Paare von Paaren, von denen das eine die Spiegelung des anderen ist:

$$\begin{array}{c|cccccccccccc} & (Ex)(Ey)(x \epsilon & V & \wedge\, y\, \epsilon & V & \wedge\, I(x) \neq I(y) \wedge & x & = & y & \wedge & x & = & y) \Rightarrow & R \\ V & & 0 & & 0 & & & & & & & & & 0 \\ K & & & & & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & \end{array}$$

Explizite Form entsprechend P3.4, S.57.

P4.4 Die Liste enthält keine Wiederholungen und keine gespiegelten Glieder:

```
  | R3.2( V    ) ∧ R̅4̅.̅3̅( V    )  ⇒  R
V | o     o      o      o           o
S |       □×2σ          □×2σ        o
```

P4.6 Für jedes Paar gibt es ein symmetrisches Paar (Symmetrie Bedingung):

```
  | (x)[x ∈ V → (Ey)[y ∈ V ∧ I(x)≠I(y) ∧ x = y ∧ x = y] ⇒ R
V |         o            o                            o
S |    [σ  □×σ       [σ  □×σ         o    1   1 - o]  o
```

(Vgl. P3.7, S.57.)

P4.7 Sämtliche Vorderglieder sind von sämtlichen Hintergliedern verschieden:

```
  | (x)  (y)  (x ∈  V   ∧ y  ∈   V  → x ≠ y) ⇒ R
V |                 o            o             o
K |                                 o   o
S |  2σ   2σ   2σ  m×2σ   2σ   m×2σ σ   σ      o
```

P4.8 Allgemeine Zusammenhanglosigkeit der Paare:

```
(R̅3̅.̅4̅(R2.8))(V) ⇒ R
 o    o       o     o
```

P4.9 Reflexivitätsbedingung:

Jedes überhaupt angeführte Vorder- bzw. Hinterglied ist auch als Paar mit sich selbst angeführt.

```
  | (x)[x ∈ Sp0 ( V   )∧x ∈ Sp1( V   )→(Ey)[y∈V∧y=x∧y=x]] ⇒ R
V |                 o              o           o            o
K |                                              o    1
S |  σ [σ    m×σ  m×2σ  σ    m×σ  m×2σ   2×σ[2σ m×2σ σ σ σ σ]]  o
```

P4.10 Transitivitätsbedingung:

```
  | (x)(x)[x ∈ V ∧ x ∈ V ∧ x  =  x → (Ex)[x ∈ V ∧ x=x ∧ x=x]] ⇒ R
V |  o  1 [o   o   1   o   o     1     2  [2   o   o 2   1 2 ]   o
K |                        1     o                 o o   1 1
S | 2σ 2σ [2σ m×2σ 2σ m×2σ σ     σ     2σ [2σ m×2σ σ σ   σ σ ]   o
```

b) <u>Aussagen über Paarlisten:</u>

Vorder- und Hinterglieder von verschiedener Struktur.

Randauszug für P4.12 bis P4.15

```
  | R(  V      )  ⇒  R
V |     o            o
S |   m×(σ,τ)        o
```

P4.12	Zusammenhang sämtlicher Paare: $\left(R_0 3.9(R_0 2.2)\right)(V_0) \Rightarrow R_0$
P ~~R~~4.13	Alle Vorderglieder sind gleich: $R3.1\left(Sp\,0\,(V_0)\right) \Rightarrow R_0$
P ~~R~~4.14	Alle Hinterglieder sind gleich: $R3.1\left(Sp\,1\,(V_0)\right) \Rightarrow R_0$
P ~~R~~4.15	Eindeutige Zuordnung

3) <u>Rechenpläne zur Ordnung von Paarlisten.</u>

Voraussetzung: x < y definiert für die Strukturen der Paarelemente.

```
  | Randauszug von P4.24 bis P4.27
  |
  |   | R( V       ) ⇒ R
  | V |    0           0
  | S |   m×(σ,τ)      0
```

```
P4.24 | Ordnen der Paare in Bezug auf die Vorderglieder:
Ord 2 |
      |   | Ord 2 ( V       ) ⇒ R               Vgl. P3.27 S.62.
      | V |         0           0
      | S |        m×(σ,τ)      0
      |
      |   | V          ⇒ Z
      | V | 0            0
      | S | m×(σ,τ)      m×(σ,τ)
      |
      |   | W1(m-1) [ Z        ⇒ Z      | i ⇒ ε
      | V |           0          1      |
      | K |           i+1               |
      | S |           (σ,τ)      (σ,τ)  | 1.n 1.n
      |
      |   |         W [ ε≥0 → [ Z < Z → [ Z        ⇒ Z      | ε-1 = ε ]
      | V |                     1   0     0          0      |
      | K |                     0   ε.0   ε          ε+1    |
      | S |                     σ   σ     (σ,τ)      (σ,τ)  |
      |   |
      |   |                   ‾Z < Z‾ → [ Z        ⇒ Z      | Fin³    ]]]
      | V |                     1   0     1          0      |
      | K |                     0   ε.0              ε+1    |
      | S |                     σ   σ     (σ,τ)      (σ,τ)  |
      |
      |   |          ε = -1 → [ Z        ⇒ Z ]
      | V |                     1          0
      | K |                                0
      | S |         1.n 1.n     (σ,τ)      (σ,τ)                     ]
      |
      |   | Z          ⇒ R
      | V | 0            0
      | S | m×(σ,τ)      m×(σ,τ)
```

```
P4.25 | Ordnen in Bezug auf die Hinterglieder:
Ord 3 |
      |   | Ord 3( V      ) ⇒ R
      | V |        0          0
      | S |        m(σ,τ)     0
      |
      |     Wie P4.24; jedoch   Z < Z   anstelle von   Z < Z
      |                         1   0                  1   0
      |                         1   ε.1                0   ε.0
      |                         τ   τ                  σ   σ
```

```
P4.26  |   | Ord 4( V     )  ⇒  R
Ord 4  | V |        o          o
       | S |      m×(σ,τ)      o
```

Ordnen in Bezug auf Vorder- und Hinterglieder. Vorderglieder haben Vorrang.

```
  |   V          ⇒  Z
V |   o             o
S | m×(σ,τ)       m×(σ,τ)

  | W1(m-1) [ Z       ⇒ Z       | i     ⇒ ε                                    ]
V |         [ o         1       |                                              ]
K |         [ i+1               |                                              ]
S |         [ (σ,τ)   (σ,τ)     | 1.n     1.n                                  ]

  |            W [ε ≥ 0 → [Z < Z v (Z = Z ∧ Z < Z )  ⇒  Z              ]]
V |              [         1   o     1   o   1   o       2              ]]
K |              [         o   ε.o   o   ε.o 1   ε.1                    ]]
S |              [         σ   σ     σ   σ   τ   τ                      ]]
  |              [                                                      ]]
  |              [         Z → [ Z      ⇒  Z     | ε -1   ⇒ ε ]         ]]
V |              [         2   [ o         o     |            ]         ]]
K |              [             [ ε         ε+1   |            ]         ]]
S |              [             [(σ,τ)     (σ,τ)  |            ]         ]]
  |              [                                                      ]]
  |              [         Z̄ → [ Z    ⇒  Z      | Fin³ ]                ]]
V |              [         2   [ 1       o      |      ]                ]]
K |              [             [ ε       ε+1    |      ]                ]]
S |              [             [ σ       σ      |      ]                ]]
  |                                                                      ]
  |                ε =   -1 → [Z ⇒ Z]                                    ]
V |                           [1   o]                                    ]
K |                           [    o]                                    ]
S |         [  1.n   1.n      [σ   σ]                                    ]

  | Z   ⇒   R
V | o       o
S | m×σ     m×σ
```

```
P4.27     Ord 5(V)
             o
```

Wie P4.26; jedoch Hinterglieder haben Vorrang vor Vordergliedern. Anderer Ansatz für Z_2 :

```
Ord 5 |   | Z < Z   v (Z = Z   ∧ Z < Z  )  ⇒  Z
      | V | 1   o      1   o     1   o        2
      | K | 1   ε.1    1   ε.1   o   ε.o
      | S | τ   τ      τ   τ     σ   σ
```

P4.28 | Ordnen innerhalb der Paare:

Ord 6

```
  | Ord 6( V      )  ⇒  R
V |        0            0
S |      m×2×σ          0

  | W1(m) [ (R1.106( V )) ⇒  R ]
V |                  0       0
K |                  i       i
S |                 2×σ     2×σ
```

4) <u>Feld, Vorbereich und Nachbereich einer Paarliste bzw. Relation:</u>

Randauszug für P4.32, P4.33, P4.34

```
  | R( V     )  ⇒  R
V |    0           0
S |  m×2×σ        □×σ
```

P4.32 | Feld einer Paarliste:

```
  | x̂(x ε Sp0 ( V     ) v x ε Sp1 ( V     )) ⇒ R
V |               0                 0           0
S |   σ    m×σ  m×2σ      σ   m×σ  m×2σ       □×σ
```

Funktionszeichen: $\underset{0}{\mathrm{Ca}(V)}$ [Campus]

P4.33 | Vorbereich einer Paarliste:

```
  | x̂(x ε Sp0 (V)) ⇒  R
V |             0     0
S |   σ   □×σ        □×σ
```

Funktionszeichen: $\underset{0}{\mathrm{Vb}(V)}$

P4.34 | Nachbereich einer Paarliste:

```
  | x̂(x ε Sp1(V))  ⇒  R
V |            0      0
S |   σ              □×σ
```

Funktionszeichen: $\underset{0}{\mathrm{Nb}(V)}$

5) <u>Rechenpläne über Strukturen von durch Paarlisten dargestellten Relationen.</u>

P4.40 Hilfsplan: Zahl der Anschlüsse eines Paargliedes.

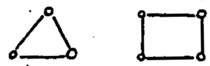
$$\begin{array}{l|llllll}
 & R(& V & , & V\ ) & \Rightarrow & R \\
V & & 0 & & 1 & & 0 \\
S & & m\times 2\sigma & & \sigma & & 1.n
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|llllllll}
 & \hat{x}(x & \in & V & \wedge & x & \neq & x) & \Rightarrow Z \\
V & & & 0 & & & & & 0 \\
K & & & & & 0 & & 1 & \\
S & 2\sigma & & m\times 2\sigma & & \sigma & & \sigma & \square\times 2\sigma
\end{array}$$

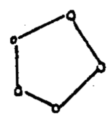
$$\begin{array}{l|llllllllllll}
 & N\Big[\ \hat{\hat{x}}\Big[& x & \in & Z & \wedge & x & = & V & \vee & x & = & V\Big]\Big] \Rightarrow R \\
V & & & & 0 & & & & 1 & & & & \quad 0 \\
K & & & & & & 0 & & & & 1 & & 1 \\
S & & 2\sigma & & \square\times 2\sigma & & \sigma & & \sigma & & \sigma & & \sigma \quad 1.n
\end{array}$$

Randauszug von P4.41 bis P4.45

$$\begin{array}{l|llll}
 & R(& V\ ) & \Rightarrow & R \\
V & & 0 & & 0 \\
S & & m\times 2\sigma & & 0
\end{array}$$

P4.41 Die Relation besteht aus einzelnen Ringen von der Gliedzahl mindestens 3 : 

$$\begin{array}{l|llllllllll}
 & R4.4(& V\ ) \wedge & (x)\Big[x \in Ca(V) \rightarrow & R4.40(& V & , & x) & = & 2\Big] & \Rightarrow R \\
V & 0 & 0 & \quad 0 & 0 & 0 & & & & & \quad 0 \\
S & 0 & m\times 2\sigma & \sigma \quad \square\times\sigma & 1.n & m\times 2\sigma & & \sigma & & 1.n &
\end{array}$$

P4.42 Die Relation besteht aus einem einzelnen Ring: 

$$\begin{array}{l|lllllll}
 & R4.1(& V\ ) & \wedge & R4.41(& V\ ) & \Rightarrow & R \\
V & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
S & & m\times 2\sigma & & & m\times 2\sigma & & 0
\end{array}$$

P4.43 Die Relation besteht aus einzelnen Ketten:

$$\begin{array}{llll}
R4.4(V) \wedge (x) & \Big[x \in Ca(V) \rightarrow & \Big[\ R4.40(V,\ x) = 1 & \Big]\Big] \Rightarrow R \\
0 \qquad 0 & \qquad\quad 0 & \quad\ 0 \qquad\ 0 & \qquad\quad 0 \\
 & & \vee\ R4.40(V,\ x) = 2 & \\
 & & \quad\ 0 \qquad\ 0 &
\end{array}$$

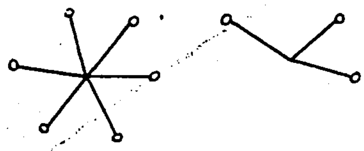
P4.44 Die Relation besteht aus einer einzigen Kette:

$$\begin{array}{lllll}
R4.1(V) & \wedge & R4.43(V) & \Rightarrow & R \\
0 \qquad 0 & & 0 \qquad 0 & & 0
\end{array}$$

~~P4.45~~ Die Relation hat Sternform:

$$\begin{array}{llll} \text{Ord } 6(& V) & \Rightarrow & Z \\ & 0 & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R4.4(Z) \\ \quad 0\,. \end{array}$$



P4.48 Alle Glieder sind miteinander kohärent:

$$\begin{array}{c|ccccc} & (R3.9(& R2.1)) & (V) & \Rightarrow & R \\ V & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ S & & & m\times2\sigma & & 0 \end{array}$$

(Pfeilfigur ergibt zusammenhängende Figur.)

Explizite Form:

$$\begin{array}{c|ccc} & V & \Rightarrow & Z \\ V & 0 & & 0 \\ K & 0 & & \\ S & 2\sigma & & \square\times2\sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccccccc} & W6 & \left[\begin{array}{ccc} Z & \Rightarrow & Z \\ 0 & & 1 \\ 0 & & \\ 2\sigma & & 2\sigma \end{array}\right| & Lz & \left[\begin{array}{c} Z \\ 0 \\ \\ \square\times2\sigma \end{array}\right. & ,\hat{x} & \left[\begin{array}{ccccccc} x \in V & \wedge & \overline{x \in Z} & \wedge & R2.1(Z, & x) \\ 0 & & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & & \\ 2\sigma \quad \square\times2\sigma & & \square\times2\sigma & & \sigma & 2\sigma & 2\sigma \end{array}\right]\right] & \Rightarrow & \begin{array}{c} Z \\ 0 \\ \\ \square\times2\sigma \end{array} \\ V & & & & & & & & \\ K & & & & & & & & \\ S & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & (x) & \left[\begin{array}{ccccc} x \in V & \rightarrow & x & \in & Z \\ 0 & & & & 0 \\ 2\sigma \quad \square\times2\sigma & & \sigma & & \square\times2\sigma \end{array}\right] & \Rightarrow & \begin{array}{c} R \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ V & & & & \\ S & 2\sigma & & & \end{array}$$

P4.49 Eindeutige Kohärenz aller Glieder (Einweg-Prinzip):

$$\begin{array}{c|cccc} & R(& V\ ) & \Rightarrow & R \\ V & & 0 & & 0 \\ S & & m\times2\sigma & & 0 \end{array}$$

Voraussetzung: (keine symmetrischen Paare)

$$\begin{array}{c|cccccc} & (x) & (x \in & V & \rightarrow & x \neq & x) \\ V & & & 0 & & & \\ K & & & & & 0 & 1 \\ S & 2\sigma & & & & \sigma & \sigma \end{array}$$

Definition:

Bezeichnet man die Vorder- und Hinterglieder der in V_0 enthaltenen Paare als Punkte von V_0, so gilt für je zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte x und y von V_0 :

Es gibt genau eine Liste Z, deren Glieder Punkte von V_0 sind, mit folgender Eigenschaft:

Das erste Glied von Z ist gleich x.
Das letzte Glied von Z ist gleich y.
Alle aus Nachbargliedern von Z gebildeten Paare sind in der Paarliste V_0 enthalten.

Mit anderen Worten: Zu je zwei Punkten x,y von V_0 gibt es genau eine Kette von Punktepaaren, die in V_0 enthalten sind, und deren erstes Glied x und deren letztes Glied y enthalten, wobei die Nachbarglieder der Kette miteinander kohärent sind.

Die exakte Formulierung dieses Ansatzes ist kompliziert. Es wird eine andere Definition gewählt:

Rekursive Definition:
Ein einzelnes nicht symmetrisches Paar ist eine eindeutig kohärente Paarliste.
Durch Hinzufügen eines neuen nicht symmetrischen Paares zu einer eindeutig kohärenten Paarliste entsteht wieder eine solche, wenn genau ein Punkt des neuen Paares gleich einem Punkt des Feldes der gegebenen Paarliste ist.

Hieraus ergibt sich folgendes Rechenverfahren:

(1) Das erste Paar der Paarliste V_0 stellt das erste Stadium der Aufbauliste Z_0 dar.

Z_1 ist die Liste der restlichen Paare von V_0, also derjenigen, die nicht in Z_0 enthalten sind.

(2) Aus der Paarliste Z_1 wird das nächste Glied herausgesucht, bei dem das Vorder- oder das Hinterglied im Feld von Z_0 enthalten ist.
Sind beide darin enthalten, so liegt Mehrdeutigkeit vor und R_0 muß negativ sein. Die Untersuchung wird dann abgebrochen.
Der Prozeß (2) wird so lange wiederholt, wie es Glieder in Z_1 gibt, die die Anschlußbedingung erfüllen.

(3) Enthält Z_1 nicht anschließbare Glieder, so liegt Inkohärenz vor und R_0 muß negativ sein. Ist Z_1 am Schluß leer, so ist R_0 positiv.

Der entsprechende Ansatz sieht wie folgt aus:

```
  | V     =>   Z
V | o          o
K | o
S | 2σ         □×2σ

  | W[ μ x [ x ∈ V ∧ x̄ ∈ Z̄ ∧ (Ey)(y ∈ Ca(Z) ∧ y = x ∨ y = x)] => Z
V |            o       o               o                      1
K |                                          o         1
S |    2σ  m×2σ 2σ   □×2σ       σ   □×σ    σ   σ   σ   σ     2σ

  | Z̄ = Z̄  => ∧R | Z = Z => Fin³ | Lz( Z , Z ) => Z
V | 1   1     o  | 1   1         |     o   1       o
K | o   1        | o   1         |
S | σ   σ     o  | σ   σ         |   □×2σ  2σ    □×2σ

  | N(Z)   =   N(V)   =>  ∧R
V |  o          o          o
S | □×2σ       m×2σ        o
```

Dieser Plan ist rechnerisch sehr umständlich; denn für jeden neu anzuschließenden Punkt müssen die restlichen Paare untersucht werden und deren Vorder- bzw. Hinterglieder mit sämtlichen bereits angeschlossenen Paaren verglichen werden. Dieses läßt sich umgehen, wenn man aus der Liste der bereits angeschlossenen Punkte (Feld von Z_0) jeweils einen Punkt herausgreift und aus der Restliste von V_0 sämtliche Glieder heraussucht, die mit diesem kohärent sind.

```
  | V     =>   Z
V | o          o
K | o
S | 2σ         □×2σ

  | W[ μ x(x ∈ Ca(Z)) => Z | x̂(x ∈ V ∧ x̄ ∈ Z̄ ∧ x = Z ∨ x = Z) => Z
V |               o       1 |        o     o                     1    2
K |                         |                      o       1
S |    σ  □×σ  m×2σ       σ | 2σ  m×2σ 2σ  □×2σ   σ    σ   σ     σ  □×2σ

  |  (x)[x ∈ Ca(Z) → (Ēy)(y ∈ Ca(Z) ∧ y ≠ Z ∧ y = x)] => Z
V |             2                 o         1              3
S |      σ  □×σ         σ                σ   σ   σ   σ     o

  |  Z => ∧R | Z̄ => Fin³ | Lz( Z , Z ) => Z
V |  3    o  | 3         |     o   2       o
S |  o    o  |           |   □×2σ □×2σ   □×2σ ]

  | N(Z)   =   N(V)   =>  ∧R
V |  o          o          o
S | □×2σ       m×2σ        o
```

In diesem Rechenplan läßt sich nun noch der Ansatz für Z_2 mit dem von Z_3 zusammenfassen, indem sofort nach jeder Neubildung eines Gliedes von Z_2 untersucht wird, ob dieses der Bedingung Z_3 genügt:

```
  | V      ⇒    Z
V | o           o
K | o
S | 2σ          □×2σ

  | W[μx(x ∈ Ca ( Z )) ⇒ Z                                         ]
V |               o        1
S |     σ    □×σ  □×2σ     σ
  |
  |   W[μ'x[x ∈ V ∧ ‾x ∈ Z‾ ∧ x = Z v x = Z]  ⇒  Z                  ]
V |              o       o       1       1        2
K |                          o       1
S |        [2σ               σ     σ σ   σ]       2σ
  |
  |    (Ex)[x  ∈ Ca(Z) ∧ x ≠ Z ∧ x = Z v x = Z]   ⇒ Z
V |                 o          1       2     2      3
K |                                    o     1
S |        [σ   □×σ        σ     σ σ   σ σ   σ]     o
  |
  |     Z ⇒ ∧R | ‾Z‾ ⇒ Fin⁵ | Lz( Z    ,   Z   )  ⇒  Z
V |     3    o |  3         |     o        2         o
S |     o      |            |     □×2σ     □×2σ      □×2σ]]
  |
  | N( Z )   =   N( V   )   ⇒   ∧R
V |    o            o           o
S |    □×2σ         m×2σ
```

Auch dieser Ansatz läßt sich noch vereinfachen. Man braucht im Ansatz für Z_3 x nicht über den gesamten Bereich des Feldes von Z_0 zu variieren, sondern nur über die Punkte, deren Glieder noch nicht sämtlich angeschlossen sind.
Es wird eine Hilfsgröße Z_4 eingeführt, welche gleich der Liste der bereits angeschlossenen Punkte ist, die aber noch nicht auf Kohärenz untersucht sind.

Wir erhalten dann als endgültige Form von P4.49 :

```
P4.49 |   | V   ⇒    Z  | Z   ⇒   Z
      | V | o        o  | o       4
      | K | o           | o.o
      | S | 2σ     □×2σ | σ      □×σ

      |   | W[μx(x ∈ Z   ) ⇒ Z
      | V |          4       1
      | S |      σ  □×σ      σ

      |   |   W[μ'x[x ∈ V ∧ ‾x ∈ Z‾ ∧ x = Z ∨ x = Z] ⇒ Z
      | V |                o      o         1       1      2
      | K |                              o      1
      | S |            [2σ  m×2σ σ  □×2σ  σ    σ   σ    σ]      2σ

      |   |      x́[ x ∈ Z ∧ x ≠ Z]⇒ Z |(‾Ex‾)[x ∈ Z    x = Z] ⇒ Z
      | V |           2          1    5 |          4          5      3
      | S |      σ[ σ  2σ   σ    σ]   σ |   σ   [σ  □×σ   σ    σ]      o

      |   |      Z ⇒ ∧R | ‾Z‾ ⇒ Fin⁵ | Lz( Z   ,  Z  ) ⇒  Z
      | V |      3    o | 3           |     o      2        o
      | S |      o    o | o           |    □×2σ   2σ      □×2σ

      |   |                             Lz( Z  ,  Z) ⇒  Z
      | V |                                 4     5      4
      | S |                                □×σ    σ     □×σ     ]]

      |   | N( Z   ) = N( V   )  ⇒   R
      | V |    o          o          o
      | S |  □×2σ       m×2σ         o
```

Bedeutung der Zwischenwerte:

Z_0 Aufbauliste der angeschlossenen Paare.

Z_1 Jeweils auf Kohärenz untersuchter Punkt.

Z_2 Neu anzuschließendes Paar.

Z_3 „Der neu angeschlossene Punkt (Z_5) ist eindeutig angeschlossen".

Z_4 Liste der angeschlossenen und noch nicht auf Kohärenz untersuchten Punkte.

Z_5 Neu angeschlossener Punkt.

In diesem Ansatz ist noch ein weiterer Hilfswert Z_5 gebildet, welcher gleich dem neu angeschlossenen Punkt ist. (Derjenige Punkt des neu angeschlossenen Paares Z_2, welcher ungleich Z_1 ist.)
Der Ansatz für Z_3 ist dann besonders einfach. Anstelle von $x \in Ca(Z_0) \wedge x \neq Z_1$, kann dann einfach $x \in Z_4$ gesetzt werden; denn Z_4 ist die Teilliste von $Ca(Z_0)$

mit den Gliedern, die für Untersuchung allein in Frage kommen.
Auf Grund der μ-Regel enthält Z_4 Z_1 nicht mehr, so daß $x \neq Z_1$ fortfallen kann.
Ebenso tritt an Stelle von $x = \begin{smallmatrix} Z \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix} \vee x = \begin{smallmatrix} Z \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ der einfache Ausdruck $x = Z_5$.
Der angeschlossene Punkt Z_5 ist jedesmal zur Liste Z_4 hinzuzufügen.

P4.50 Zusammenfassen der kohärenten Glieder in Gruppen:

$$\begin{array}{c|ccc|cccc} & R(V) & \Rightarrow & R & (R3.69(R2.1))(V) & & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 0 & 0 \quad 0 & 0 & & 0 \\ S & m\times 2\sigma & & m\times(2\sigma,1.n) & & & & \end{array}$$

P4.51 Untersuchung auf eindeutige Kohärenz und Ordnung in kohärente Gruppen;
Vereinigung von Plan P4.49 und P4.50;
dazu Bildung der Liste der Bestimmtheitsgrade der Teilgruppen:

$$\begin{array}{c|cccccc} & R(V) & \Rightarrow & (R, & R & , & R) \\ V & 0 & & 0 & 1 & & 2 \\ S & m\times 2\sigma & & 0 & m\times(2\sigma,1.n) & & \square\times 2\times 1.n \end{array}$$

Voraussetzung: keine symmetrischen Paare wie bei P4.49 (s.S.82).

Bedeutung der Resultatwerte:

R_0 „Die Paarliste ist eindeutig kohärent".

R_1 Der Kohärenz nach geordnete Paarliste mit Gruppennummern.

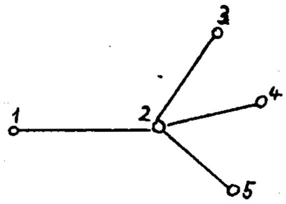
R_2 Liste der Bestimmtheitsgrade der Teilgruppen mit Gruppennummern.

$\begin{smallmatrix} R \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}$ Gruppennummer $\begin{smallmatrix} R \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ = Bestimmtheitsgrad.

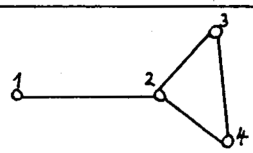
Bei einer in sich eindeutig kohärenten Gruppe von Paaren (Teilliste von V_0) ist der Bestimmtheitsgrad gleich 1 . Jedes doppelte Paar und jedes in Bezug auf Kohärenz überflüssige Paar erhöht den Bestimmtheitsgrad ε um 1 .

Beispiel:

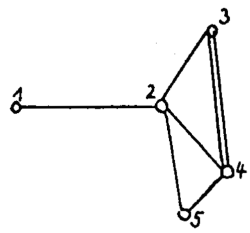
1 – 2 $\varepsilon = 1$
2 – 3
2 – 4
2 – 5



1 – 2 $\varepsilon = 2$
2 – 3
2 – 4
3 – 4



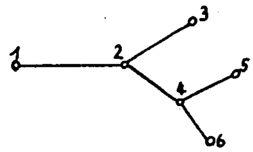
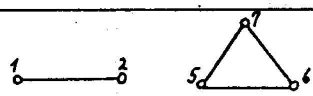
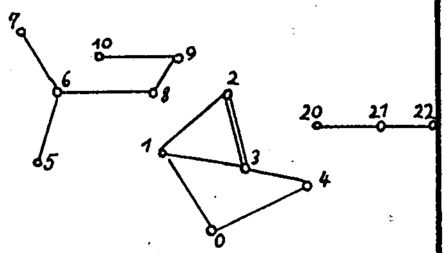
1 – 2 $\varepsilon = 4$
3 – 4
2 – 3
2 – 4
3 – 4
4 – 5
5 – 2



P4.51 ist aus P4.49 (s.S.86) entwickelt.
Die Untersuchung, die bei P4.49 auf die ganze Paarliste angesetzt wird, gilt bei P4.51 für eine einzelne Gruppe. Wir brauchen also noch einen übergeordneten W-Plan, in dem nacheinander die Untersuchungen für die einzelnen Gruppen durchgeführt werden. An Stelle der Gesamtgruppe V_0 tritt hierbei die Restliste Z_{10}, welche die Liste der noch nicht angeschlossenen Paare von V_0 nach Abschluß einer Gruppe darstellt. Am Anfang muß Z_{10} also gleich V_0 sein. Z_0 stellt nur die Aufbauliste der gerade untersuchten Gruppe dar. Wir brauchen also zum Aufbau von R_1 (Liste der geordneten Paare) noch eine Aufbauliste Z_{11}. Diese ist am Anfang leer. Nach Abschluß einer Gruppe wird die Paarliste der letzten Gruppe Z_0 ergänzt durch die Gruppennummer ε_0.
Bis zur Bildung von Z_3 ist dann alles analog P4.49 aufgebaut. Im Falle Z_3 muß jedoch ε_1 um 1 erhöht werden, da es sich dann um ein überzähliges Paar handelt (in Bezug auf Kohärenz). Nach Abschluß einer Gruppe muß außer der bereits besprochenen Bildung von Z_{11} noch das nächste Glied von R_2 gebildet werden, welches aus den beiden ε-Werten besteht.
Die bei P4.49 am Schluß stehende Bedingung für R_0 (N(...) wird durch die Bedingung ersetzt, daß am Schluß $\varepsilon_1 = 1$ sein muß, wenn R_0 positiv ist, also wenn V_0 aus einer einzigen kohärenten Gruppe besteht.

P4.51 fehlt. Siehe P4.52

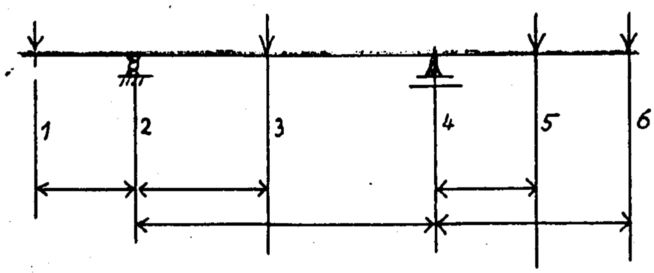
Beispiele für P4.51:

V_o	R_o	R_1	R_2	zugeordnetes Bild der Relationen
1 - 2	+	1 - 2 , 0	0 , 1	
2 - 3		2 - 3 , 0		
2 - 4		2 - 4 , 0		
4 - 5		4 - 5 , 0		
4 - 6		4 - 6 , 0		
1 - 2	−	1 - 2 , 0	0 , 1	
5 - 7		5 - 7 , 1	1 , 2	
5 - 6		5 - 6 , 1		
6 - 7		6 - 7 , 1		
1 - 2	−	1 - 2 , 0	0 , 3	
2 - 3		1 - 3 , 0	1 , 1	
1 - 3		0 - 1 , 0	2 , 1	
3 - 4		2 - 3 , 0		
2 - 3		2 - 3 , 0		
20 -21		0 - 4 , 0		
0 - 1		3 - 4 , 0		
0 - 4		20 -21 , 1		
22 -21		22 -21 , 1		
10 - 9		10 - 9 , 2		
8 - 9		8 - 9 , 2		
5 - 6		6 - 8 , 2		
7 - 6		5 - 6 , 2		
6 - 8		7 - 6 , 2		

Wichtige Anwendung von P4.49 und P4.51 :

Vermaßung auf einer Achse:

Beispiel:



Liste der Maße:

1 - 2
2 - 3
2 - 4
4 - 5
4 - 6

Es liegt eindeutige Vermaßung vor.

Anderes Beispiel: Fernsprechnetz. Im Falle Eindeutigkeit stets nur eine Verbindungsmöglichkeit zwischen 2 Punkten.

P4.52 Erweiterung von P4.51.

Allgemeine Analyse einer beliebigen Paarliste in Bezug auf Kohärenz.
Symmetrische Paare sollen besonders herausgezogen werden.
Ferner werden die doppelt bzw. zueinander gespiegelten Paare besonders herausgesucht.

Randauszug:

$$\begin{array}{c|c} & R(V) \\ V & 0 \\ S & 4 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccccc} R, & R, & R, & R, & R, & R, & R \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & \square\times(2,9) & \square\times 2\times 9 & 0 & 4 & 0 & \square\times(2,9) \end{array}\right]$$

Bedeutung der Strukturzeichen:

- S0 = Ja-Nein-Wert
- S2 = $2\times\sigma$ (Angabenpaar)
- S3 = $\square\times\sigma$ (Liste)
- S4 = $\square\times 2\times\sigma$ (Paarliste)
- S9 = positive ganze Zahl .

Bedeutung der Resultatwerte:

- R_0 „Die Paarliste V_0 ist eindeutig kohärent".
- R_1 Paarliste nach Gruppen geordnet und durch Gruppennummer ergänzt.
- R_2 Liste der Gruppen und ihrer Bestimmtheitsgrade.
- R_3 „Die Paarliste enthält symmetrische Paare" (Vorderglied = Hinterglied).
- R_4 Liste der symmetrischen Paare.
- R_5 „Die Paarliste enthält Paare, die gleich einem anderen oder dessen Spiegelung sind".
- R_6 Liste der Paare entsprechend R_5 .

Bedeutung der Zwischenwerte:

$\begin{array}{c\|l} & Z \\ V & 0 \\ S & 4 \end{array}$	Restliste von V_0 nach Abschluß einer Gruppe.
$\begin{array}{c\|l} & Z \\ V & 1 \\ S & 4 \end{array}$	Aufbauliste der jeweils in Bildung befindlichen Gruppe.
$\begin{array}{c\|l} & Z \\ V & 2 \\ S & 3 \end{array}$	Liste der an Z_5 bereits angeschlossenen Punkte.
$\begin{array}{c\|l} & Z \\ V & 3 \\ S & 3 \end{array}$	Liste der bereits angschlossenen Punkte der in Bildung befindlichen Gruppe.
$\begin{array}{c\|l} & Z \\ V & 4 \\ S & 2 \end{array}$	Letztes neu angeschlossenes Paar.
$\begin{array}{c\|l} & Z \\ V & 5 \\ S & \sigma \end{array}$	Punkt, dessen Anschlüsse gerade untersucht werden.
$\begin{array}{c\|l} & Z \\ V & 6 \\ S & \sigma \end{array}$	Letzter über Z_4 an Z_5 angeschlossener Punkt.
$\begin{array}{c\|l} & Z \\ V & 7 \\ S & 0 \end{array}$	Kriterium für doppeltes Paar.
$\begin{array}{c\|l} & Z \\ V & 8 \\ S & 0 \end{array}$	Kriterium für mehrdeutige Kohärenz.
$\begin{array}{c\|l} & Z \\ V & 10 \\ S & \square \times (2,9) \end{array}$	Aufbauliste des Resultatwerts R_1.
$\begin{array}{c\|l} & \varepsilon \\ V & 0 \\ S & 9 \end{array}$	Gruppennummer
$\begin{array}{c\|l} & \varepsilon \\ V & 1 \\ S & 9 \end{array}$	Bestimmtheitsgrad der jeweiligen Gruppe.

```
P4.52 |   ① V ⇒ Z | ② ϕ ⇒ Z         | ③ o ⇒ ε
      V     o   o |      10          |       o
      S     4   4 |      □x(2,9)     |       9

      |W6[④ Z    ⇒ Z|⑤ 1 ⇒ ε|  ⑥ ϕ ⇒ Z
      V     o      3|        1|       1
      K    o.o
      S     σ      3|        9|       4

      |   W[⑦ μx(x ∈ Z) ⇒ Z| ⑧ ϕ ⇒ Z
      V             3     5|       2
      S             3     σ|       3

      |     W[⑨ μ'x[x ∈ Z ∧ ‾x ∈ Z‾ ∧ x = Z ∨ x = Z] ⇒ Z
      V                 o       1          5       5     4
      K                             o          1
      S           [2 4 2 4          σ      σ   σ   σ]    2

      |        ⑩ Z = Z → [+ ⇒ VR | Z ⇒ μR | Fin²]
      V           4   4            3 | 4     4 |
      K           o   1              |         |
      S           σ   σ            o | 2     4 |

      |        ⑪ x́  [x ∈ Z ∧ x ≠ Z] ⇒ Z
      V                  4        5     6
      S           σ   [σ   2        σ]    σ

      |        ⑫ (Ex)[x∈Z∧x=Z] ⇒ Z| ⑬ Z∨(Ex)[x∈Z∧x=Z] ⇒ Z
      V                   2   6     7|    7            3   6     8
      S              [σ 3 σ σ]    o|              [σ 3 σ σ]    o

      |        ⑭ Z → [+⇒VR| (Z,ε)⇒μR       ]⑮ Z → [Lz(Z,Z) ⇒ Z
      V           7       5 | 4 o     6          7        2 6    2
      S           o       o | 2 9     □x(2,9)]   o        3 σ    3]

      |        ⑯ Z → (ε+1⇒ε)| ⑰ Z⇒∧R | ⑰a Z → [Lz(Z,Z ⇒ Z
      V           8    1   1 |    8  o  |     8        3 6    3
      S           o    9   9 |    o     |     o        3 σ    3]

      |        ⑱ Lz(Z,Z) ⇒ Z
      V              1 4     1
      S              4 2     4

      |  ⑲ (ε,ε) ⇒ μR | ⑳ Lz[Z        , Qz(Z, ε)] ⇒ Z
      V       o 1     2 |      10              1  o      10
      S       9 9     4 |      [□x(2,9)        4  9]     □x(2,9)

      |  ㉑ x̂̂(x ∈ Z ∧ ‾x ∈ Z‾) ⇒ Z| ㉒ ε+1 ⇒ ε
      V            o       1     o |     o     o
      S       2    4       4     4 |     9     9

      | ㉓(ε = 1) ⇒ ∧R | ㉔ Z  ⇒  R
      V      1          o |    10     1
      S      9          o |           □x(2,9)
```

Formulierung von P4.52 in Worten:

1. Die gegebene Paarliste V_0 bildet das Ausgangsstadium der Liste Z_0.
2. Die Liste Z_{10} ist am Anfang leer.
3. ε_0 ist am Anfang Null.
4. Der erste Punkt des ersten Paares von Z_0 ergibt Z_3. Ist Z_0 leer, so gehe über zu 23.
5. Setze $\varepsilon_1 = 1$.
6. Setze Z_1 gleich der Leermenge. (Am Anfang ist Z_1 leer. Im Wiederholungsfalle müssen die bisherigen Glieder von Z_1 gelöscht werden.)
7. Das nächste (noch nicht berücksichtigte) Glied der Liste Z_3 ergibt Z_5.
   Gibt es kein solches, so gehe zurück zu 4.
8. Setze Z_2 gleich der Leermenge.
9. Suche aus der Menge der Paare, die in Z_0, aber nicht in Z_1 enthalten sind, das nächste Paar heraus, bei dem ein Glied gleich Z_5 ist; dieses ergibt Z_4.
   Gibt es kein solches, so gehe zurück zu 7.
10. Ist das Vorderglied von Z_4 gleich dem Hinterglied, so gilt:
    Setze R_3 positiv,
    füge Z_4 der Liste R_4 hinzu (falls diese noch leer ist, so ergibt Z_4 das erste Glied),
    gehe zurück zu 9.
11. Dasjenige Glied des Paares Z_4, welches ungleich Z_5 ist, ergibt Z_6.
12. Gibt es in der Liste Z_2 ein Glied, welches gleich Z_6 ist, so ist Z_7 positiv, sonst negativ.
13. Gibt es in der Liste Z_3 ein Glied, welches gleich Z_6 ist, so ist Z_8 positiv, sonst negativ.
14. Ist Z_7 positiv, so gilt:
    R_5 ist positiv,
    Z_4, ergänzt durch ε_0, ergibt das nächste Glied von R_6.
15. Ist Z_7 negativ, so füge Z_6 der Liste Z_2 hinzu.
16. Ist Z_8 positiv, so erhöhe ε_1 um 1.
17. Es ist eine notwendige Bedingung für R_0, daß Z_8 negativ ist.

17a. Ist Z_8 negativ, so füge Z_6 der Liste Z_3 hinzu.

(18) Füge Z_4 der Liste Z_1 hinzu.
Gehe zurück zu (7).

(19) Das Wertepaar $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ ergibt das nächste Glied von R_2.

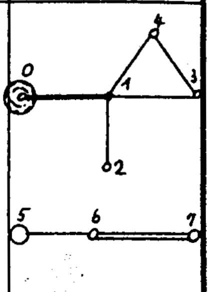
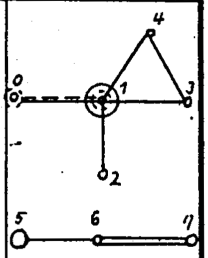
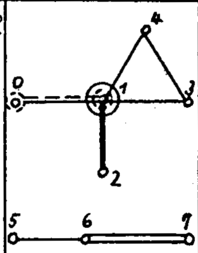
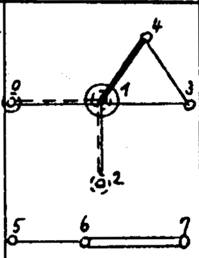
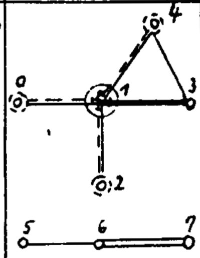
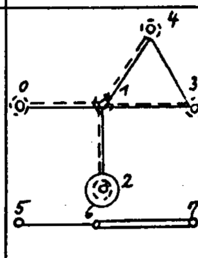
(20) Ergänze die Glieder der Liste Z_1 durch ε_0 und füge sie der Liste Z_{10} hinzu.

(21) Die Restliste von Z_0 ohne die Glieder, die in Z_1 enthalten sind, ergibt die neue Liste Z_0.

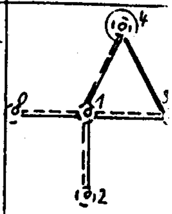
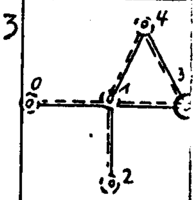
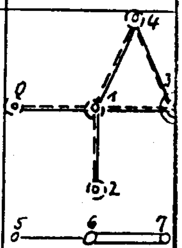
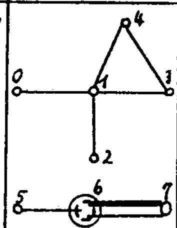
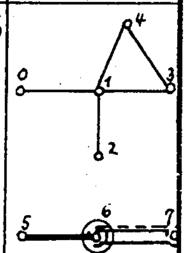
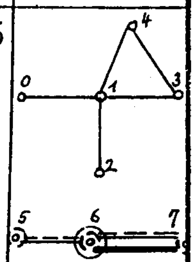
(22) Erhöhe ε_0 um 1.
Gehe zurück zu (4).

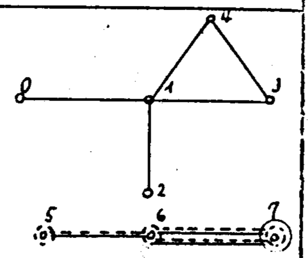
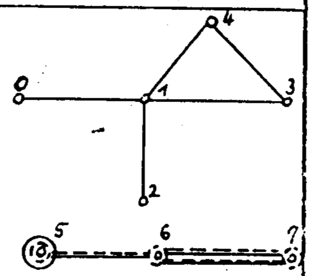
(23) Es ist eine notwendige Bedingung für R_0, daß $\varepsilon_1 = 1$ ist.

(24) Z_{10} ergibt R_1.

Op.		Z_0	Z_1	Z_{10}	Z_2	Z_3					
1 2 3 4 5 6 7 8 9	10- 11 12 13 14-	1 0-1 6-7 3-3 1-2 5-6 7-6 3-4 1-4 1-3	6 -	2 -	8 -	4 0	R_0 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6		24 5 6 7 8 ε 0 1	0-1 7 0 11 1 12 - 13 - 3 0 5 1	
15 16- 17 17a 18 9- 7		0-1 6-7 3-3 1-2 5-6 7-6 3-4 1-4 1-3	18 0-1		15 1	17a 0 1	R_0 2 3 4 5 6	17 +	24 5 6 7 8 ε 0 1	7 1	
8 9 10- 11 12 13 14-		0-1 6-7 3-3 $\boxed{1-2}$ 5-6 7-6 3-4 1-4 1-3	0-1		8 -	0 1	R_0 2 3 4 5 6	+	24 5 6 7 8 ε 0 1	9 1-2 1 11 2 12 - 13 - 0 1	
15 16- 17 17a 18 9 10- 11 14-		0-1 6-7 3-3 1-2 5-6 7-6 3-4 $\boxed{1-4}$ 1-3	0-1 18 1-2		15 2	0 1 17a 2	Ro 3 4 5 6	17 +	24 5 6 7 8 ε 0 1	1-4 1 11 4 12 - 13 - 0 1	
15 16- 17 17a 18 9 10- 11 12 13	14-	0-1 6-7 3-3 1-2 5-6 7-6 3-4 1-4 $\boxed{1-3}$	0-1 1-2 18 1-4		2 15 4	0 1 2 17a 4	Ro 2 3 4 5 6	17 +	24 5 6 7 8 ε 0 1	1-3 1 11 3 12 - 13 - 0 1	
15 16- 17 17a 18 9- 7		0-1 6-7 3-3 1-2 5-6 7-6 3-4 1-4 1-3	0-1 1-2 1-4 18 1-3		2 4 15 3	0 1 2 4 17a 3	Ro 2 3 4 5 6	17 +	24 5 6 7 8 ε 0 1	7 2 0 1	

Dipl.-Ing. K. Zuse
Ingenieurbüro
und Apparatebau
Berlin

Op.		Z_0	Z_1	Z_{10}	Z_2	Z_3					
8 9- 7 8 9 10- 11 12 13	14-	0-1 6-7 3-3 1-2 5-6 7-6 3-4 1-4 1-3	0-1 1-2 1-4 1-3		8 8 -	0 1 2 4 3	Ro 2 3 4 5 6	17 -	24 5 6 7 8 ε0 1	9 3-4 7 4 11 3 12 - 13 + 0 16 2	
15 16 17 17a- 18 9 10 9-		0-1 6-7 3-3 1-2 5-6 7-6 3-4 1-4 1-3	0-1 1-2 1-4 1-3 18 3-4		15 3	0 1 2 4 3	Ro 2 3 4 5 6	- 10 + 10 3-3	24 5 6 7 8 ε0 1	9 3-3 - 0 2	
7 8 9- 7- 19 20 21 22		21 6-7 5-6 7-6	0-1 1-2 1-4 1-3 3-4	20 0-1,0 1-2,0 1-4,0 1-3,0 1-4,0	8 -	0 1 2 4 3	Ro 2 3 4 5 6	- 19 0,2 + 3-3	24 5 6 7 8 ε0 1	7 3 22 1	
4 5 7 8 9 10- 11 14-		6-7 5-6 7-6	6 -	0-1,0 1-2,0 1-4,0 1-3,0 3-4,0	8 -	4 6	Ro 2 3 4 5 6	- 0,2 + 3-3	24 5 6 7 8 ε0 1	9 6-7 7 6 11 7 12 - 13 - 1 5 1	
15 16- 17- 17a 18 9 10- 11 12	13 14-	6-7 5-6 7-6	18 6-7	0-1,0 1-2,0 1-4,0 1-3,0 3-4,0	15 7	6 17a 7	Ro 2 3 4 5 6	- 0,2 + 3-3	24 5 6 7 8 ε0 1	9 5-6 6 11 5 12 - 13 - 1 1	
15 16- 17- 17a 18 9 10- 11 12	13 14 15- 16 17- 17a-	6-7 5-6 7-6	6-7 18 5-6	0-1,0 1-2,0 1-4,0 1-3,0 3-4,0	7 15 5	6 7 17a 5	Ro 2 3 4 5 6	- 0,2 + 3-3 14 + 14 7-6,1	24 5 6 7 8 ε0 1	9 7-6 6 11 7 12 + 13 + 1 16 2	

Op.	Z_0	Z_1	Z_{10}	Z_2	Z_3					
18 9- 7 8 9-	6-7 5-6 7-6	6-7 5-6 18 7-6	0-1,0 1-2,0 1-4,0 1-3,0 3-4,0	8 -	6 7 5	Ro 2 3 4 5 6	- 0,2 + 3-3 + 7-6,1	24 5 6 7 8 ε0 1	7 7 1 2	
7 8 9- 7- 19 20 21- 4- 23- 24	6-7 5-6 7-6	6-7 5-6 7-6	0-1,0 1-2,0 1-4,0 1-3,0 3-4,0 20 6-7,1 20 5-6,1 20 7-6,1 24=R_1	8 -	6 7 5	Ro R2 R3 R4 R5 R6	- 0,2 9 1,2 + 3-3 + 7-6,1	ε0 1	7 5 22 2 2	

Zusammenstellung der Ausgangs- und Res-Werte:

$$V_o = \begin{bmatrix} 0-1 \\ 6-7 \\ 3-3 \\ 1-2 \\ 5-6 \\ 7-6 \\ 3-4 \\ 1-4 \\ 1-3 \end{bmatrix} \qquad R_o = - \qquad R_1 = \begin{bmatrix} 0-1,0 \\ 1-2,0 \\ 1-4,0 \\ 1-3,0 \\ 3-4,0 \\ 6-7,1 \\ 5-6,1 \\ 7-6,1 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 1,2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = + \qquad R_4 = 3-3 \qquad R_5 = + \qquad R_6 = 7-6,1$$

Auslegung der Resultate:

Die Paarliste ist nicht eindeutig kohärent (R_o)
Sie besteht aus den kohärenten Gruppen: (R_1)

Gruppe 0 :		Gruppe 1 :	
	0-1		6-7
	1-2		5-6
	1-4		7-6
	1-3		
	3-4		

Gruppe 0 und Gruppe 1 sind von Bestimmtheitsgrad 2 (R_2).
Es ist ein symmetrisches Paar vorhanden (R_3), nämlich 3-3.
Es ist doppeltes Paar vorhanden (R_4), nämlich 7-6 (R_6).

Anhang zu Kapitel 1 und 2.

1) Bedeutung der Buchstaben:

Zeichen	Bedeutung	Erklärt auf Kap.	Seite
A	Angabenart	1	3
B	Beschränkungszeichen	1	3
C	Constante	1	7
E	Existenz-Operator	1	27
F, G	Funktionszeichen, allgemein	-	
I,i	Index	1	7,24
j	"	1	24
K	Komponente	1	4
L	Listenzeichen	1	~~36~~ 26
m, n	Gliedzahl von Angaben	1	2
N	Anzahl der Glieder einer Liste	1 2	3 22
P	Planzeichen	1	7
R	Resultatwert	1	8(41)
S	Struktur	1	2
T	Angabentyp	1	3
U	Unterplan	1	~~11~~ 10
V,v	Variable	1 1	6 8
W	Wiederholungsplan	1	21 ff.
x, y	gebundene Variable, auch allgemeine Variable	1	31 ff. 36
z	Zwischenwert	1	8
α	Variables Angabenartzeichen	1	15
ε	laufend veränderliche Hilfsgröße eines Rechenplanes	1	23
$\varkappa$	variabler Komponentenindex	1	17
λ	„das Letzte"	1	35
μ	„das Nächste"	1	31
π	variables Planzeichen	1	13
σ, τ	variables Strukturzeichen	1 1	2 3
Π, Σ	Produkt, Summe	1	39

2) Bedeutung der Zeichen:

Zeichen	Bedeutung	Kap.	Seite
$\square$	Allgemeines Leerstellenzeichen	1	2
$\vee$	Disjunktion } Im Sinne des Aussagenkalküls		
$\wedge$	Konjunktion		
$\bar{x}$	Negation	2	1
$\rightarrow$	Implikation		
$\nsim$	Disvalenz		
$\sim$	Aequivalenz		
$\dashrightarrow$	Planzeichen für bedingte Planteile	1	17
$\curlyvee$	} Sammeloperationen		
$\curlywedge$		2	9
$\rightrightarrows$			
$\not\approx$			
$\approx$			
$+$	Addition } Im Sinne der Arithmetik		
$-$	Subtraktion		
$\times$	Multiplikation	3	
$:$	Division		
$\sqrt{}$	Wurzel		
$=$	Gleichheitszeichen		
$\equiv$	Identitätszeichen		
$\Rightarrow$	Ergibtzeichen	1	9
$\ominus$	gleiche Zusammensetzung	2	20
$=_{Df}$	Definitionsgleich		
$<$	kleiner als		
$>$	größer als		
$\leqslant$	kleiner oder gleich		
$\geqslant$	größer oder gleich		
0	Indifferenz	1	5
Δ	Variables Plangruppenzeichen	1	2
ϕ	Nullmenge	1	29,40
$\dot{o}$	variables Operationszeichen	1	12
$\in$	„ist Glied von ..."	1	27
$\cup$	Vereinigung " }	2	30
$\cap$	Durchschnitt		31
V	Disjunktionsglied von ...	1	39
Λ	Konjunktionsglied von ...	1	39
( ) [ ]	Klammerzeichen		
|	Trennzeichen zwischen Ausdrücken		
,	Trennzeichen zwischen Komponenten	1	5
$\int \lfloor$	Zeilenverschiebung	1	17,40
$\hat{x}$	Diejenigen (ohne Wiederholung)	1	29
$\hat{\hat{x}}$	" (mit " ")	1	30
$\acute{x}$	Dasjenige	1	31
$\vdash$	Behauptungszeichen	1	40
$\ominus$	Generalnegation	2	4
$\hat{\ominus}$	" konjunktion	2	2
$\check{\ominus}$	" disjunktion	2	2

3) Bedeutung der allgemeingültigen Funktionszeichen u.s.w.:

Zeichen	Bedeutung	Kap.	Seite
Ca	Feld einer Relation (Paarliste)	2	39
Fin	Schlußzeichen	1	16
Fpos	positiver Werte einer Funktion	3	9
Ger	gerade Zahl	1	30
		3	7
Gz	ganze Zahl	3	7
Lz	Längszusammensetzung	2	18, 25
Maj	der Größere	1	17
		2	10
Max	das Größte	2	20
Min	der Kleinere, das Kleinste	2	10, 19
Nb	Nachbereich einer Relation	2	39
Nr	Nummerierung der Glieder einer Liste	2	26
Ord 0	Ordnen eines Paares	2	10
Ord 1	Ordnen einer Liste	2	21
Ord 2-6	Ordnen einer Paarliste	2	37-39
Pos	positiv	3	7
Pz	Unterplan	1	11
Qz	Querzusammensetzung	2	26
Rz	Resultatwert eines Unterplans	1	11
Sign	Vorzeichen	3	9
Sp	Spalte einer Liste	2	19
Tl 1 Tl 2	Teilliste	2	28
Üb	Übertragung	2	7
Vb	Vorbereich einer Relation	2	39

4) Bedeutung der allgemeinen Strukturzeichen:

So		Ja-Nein-Wert
S1.n	= n×So	n-stellige Folge von Ja-Nein-Werten
S2	= 2×σ	Angabenpaar
S3	= m×σ	Liste
S4	= m×2σ	Paarliste

A8	Zahl allgemein	Kap. 3, Seite 3
A9	ganze positive Zahl	
A10	ganze Zahl	
A11	gebrochene positive Zahl	
A12	gebrochene Zahl	
A13	komplexe Zahl	

5) Rangordnung der Zeichen entsprechend ihrer Reichweite:

$|\!\rightarrow \quad \Rightarrow \quad \approx \quad \rightarrow \quad \wedge \; \vee \quad = \quad + \quad \times$

$< \quad - \quad :$

$>$

$\in$

$\longrightarrow$ stärkere Bindung

Inhaltsverzeichnis von Kapitel 3

Rechenpläne der Zahlenrechnung

Kap. 3: Rechenpläne der Zahlenrechnung.

I. Allgemeines über Strukturen und Angabenarten.

Die beim Zahlenrechnen auftretenden Angabenarten und Strukturen sind sehr mannigfach. Ohne auf die Art der Darstellung im Einzelnen einzugehen, kann man zunächst folgende grundsätzliche Zahlenarten unterscheiden:

1) Skalare:
   - a) ganze positive Zahl
   - b) ganze positive bzw. negative Zahl
   - c) gebrochene positive Zahl
   - d) gebrochene positive bzw. negative Zahl.

   Die Unterscheidung nach rationalen und irrationalen Zahlen erübrigt sich, da letztere durch keine Struktur allgemein exakt dargestellt werden können. Sie müssen stets durch rationale gebrochene Zahlen angenähert werden.

2) Zusammengesetzte Größen:
   - a) komplexe Zahlen
   - b) Vektoren.

Diese Zahlenarten sind wieder auf sehr verschiedene Arten darstellbar. Wir können z.B. folgende Zahlensysteme unterscheiden:

1) Homogene Zahlensysteme, z.B.
   - a) ~~Sekundal~~-System
   - b) Dezimal-System
2) Nicht homogene Zahlensysteme, z.B.
   - a) Einteilung des Kreisumfangs in Grad, Minuten, Sekunden
   - b) Einteilung der Tageszeit in Stunden, Minuten, Sekunden
   - c) englisches Längenmaßsystem (mile, yard, inch)
   - d) Währungssysteme, z.B. Pfundwährung.

Ferner können nach Festlegung der Zahlenart und des Zahlensystems noch verschiedene Darstellungsarten verwandt werden, z.B.:

1) Die Kennzeichnung der positiven und negativen Zahlen kann erfolgen
   a) durch Vorzeichen
   b) durch Supplement-Darstellung.
2) Zur Kennzeichnung der Größenordnung der Zahlen können Potenzfaktoren hinzugesetzt werden (halblogarithmische Form).
3) Darstellung durch Logarithmen.
4) Darstellung durch Brüche $\left(\frac{a}{b}\right)$.

Schließlich können die Zahlen durch Sonderangaben ergänzt werden, welche Auskunft über die Fälle erteilen, welche durch die normale Darstellungsform der Zahl nicht genügend gekennzeichnet werden können, z.B.:

1) Kennzeichnung von „∞", „sehr groß".
2) Kennzeichnung von „genau Null" (bei halblogarithmischer und logarithmischer Darstellung).
3) Kennzeichnung von „unbestimmt".

Vgl. hierzu die Rechenoperationen des algebraischen Rechengerätes V_4 .

Aus der Fülle dieser Möglichkeiten lassen sich Angabenarten bzw. Zahlenarten von allgemeiner Bedeutung und solche von spezieller Bedeutung bilden.

Von allgemeiner Bedeutung sind z.B. die grundsätzlichen Arten (positive ganze Zahlen u.s.w.).

Von spezieller Bedeutung sind z.B. Größen zur Winkelbestimmung (Grad-System) oder Währungssysteme. (Z.B. sind Beträge in der Markwährung durch gebrochene Dezimalzahlen darstellbar, die jedoch nur 2 Stellen hinter dem Komma aufweisen.) Von spezieller Bedeutung sind ferner noch die in einem speziellen Rechengerät auftretenden Zahlenarten (z.B. V_4).

Es werden zunächst nur Rechenpläne für Zahlenarten von allgemeiner Bedeutung entwickelt.

Es werden folgende Angaben festgelegt:

A8 Zahl allgemein ohne besondere Festlegung
A9 ganze positive Zahl
A10 ganze (positive bzw. negative) Zahl
A11 gebrochene positive Zahl
A12 gebrochene (Positive bzw. negative) Zahl
A13 komplexe Zahl.

Diese Angabenzeichen sind Allgemeinzeichen für Gruppen verschiedener Strukturzeichen, deren Auslegung analog ist (z.B. Dez-Zahlen bzw. ~~Sek~~-Zahlen verschiedener Stellenzahl). Dual

Es können jedoch nicht sämtliche Möglichkeiten dieser Strukturenarten aufgezählt werden, da sie zu mannigfach sind. (Die Menge der möglichen Zahlensysteme ist z.B. unbegrenzt.)

Dementsprechend werden nur die jeweils benötigten Strukturen besonders definiert. Es werden folgende Untergruppen der obigen Angabenarten festgelegt:

A9.2 ganze positive Dual ~~Sek~~-Zahl
A9.10 ganze positive Dezimal ~~Dez~~-Zahl

A10.2 ganze (positive bzw. negative) Dual ~~Sek~~-Zahl
(Art der Darstellung der negativen Zahlen nicht festgelegt)

A10.2.0 wie A10.2 , jedoch Supplement-Darstellung
A10.2.1 wie A10.2 , jedoch Vorzeichen-Darstellung

A10.10 ganze (positive bzw. negative) Dezimal ~~Dez~~-Zahl

A10.10.0
A10.10.1 } entsprechend A10.2.0, A10.2.1

A11.2
A11.10

A12.2
A12.2.0
A12.2.1
A12.10
A12.10.0
A12.10.1 } entsprechend ~~[illegible]~~ A9..., A10....

Nunmehr können für diese Angabenarten auch die Angabenstrukturen festgelegt werden.

A9.2	=	S1.n	
A9.10	=	n×S1.4 B	(die einzelnen Dezimalziffern werden durch S1.4 dargestellt)
A10.2.0	=	S1.n	
A10.2.1	=	(So, S1.n)	Ko = Vorzeichen K1 = Zahl
A10.10.0	=	nxS1.4	
A10.10.1	=	(So, A8.10)	
A11.2	=	(S1.m, S1.n)	Ko = Ziffernfolge vor dem Komma K1 = Ziffernfolge nach dem Komma
A11.10	=	(m×S1.4, n×S1.4)	Ko, K1 entsprechend A10.2
A12.2.0	=	(S1.m, S1.n)	
A12.2.1	=	(So, A10.2)	
A12.10.0	=	(m×S1.4, n×S1.4)	
A12.10.1	=	(So, A10.10)	
A13	=	2×A12	

Weitere Strukturen werden bei Bedarf festgelegt.

II. Allgemeines über die Rechenpläne.

Ebenso mannigfaltig wie die Zahlenarten und ihre Darstellungsformen sind die Rechenpläne zwischen Zahlen.

arithmeti
Rechenpläne mit Zahlen entsprechen meistens ~~algebrai~~schen Rechenoperationen. Und zwar sind mit fast allen Zahlenarten analoge Rechenoperationen möglich (z.B. Addition). Demgemäß sollen die bekannten Operationszeichen der ~~Algebra~~ weiterhin benutzt werden. Sie vertreten die Planzeichen einer Gruppe analoger Rechenpläne. So ist z.B. je nach Zahlenart und Darstellungsart der Rechenplan für die Addition jeweils verschieden aufgebaut. Der spezielle Fall ergibt sich jedoch aus den Angabenarten der Operanden. Es genügt im allgemeinen also das Operationszeichen.
Arithmetik
S. 70

Es wird jedoch jedem Operationszeichen ein Plangruppenzeichen zugeordnet. Die Kennzeichnung des speziellen Rechenplans der betreffenden Gruppe erfolgt, falls erforderlich, durch zusätzliche Angaben, die im allgemeinen in der Strukturangabe bestehen. Jedoch sind für die gleiche Struktur noch wieder verschiedene Rechenpläne denkbar (z.B. solche mit und solche ohne Signal bei Stellenüberschreitung).

Verschiedene Rechenpläne können äquivalent bzw. quasiäquivalent sein. So sind selbst bei völlig gleicher Struktur der Ausgangs- und Resultatwerte verschiedene Multiplikationsverfahren möglich (z.B. erster bzw. zweiter Faktor als Multiplikator). Sind die Resultate bei allen Variationen der Ausgangswerte völlig gleich, so sind die Rechenpläne äquivalent, weisen sie geringe Abweichungen in Bezug auf die Genauigkeit auf, so sind sie quasi-äquivalent. Es wird bei letzterem noch vorausgesetzt, daß mit zunehmender Stellenzahl diese Differenzen gegen Null gehen.

Der volle Rechenplan einer Operation enthält mitunter außer dem eigentlichen Resultat der Operation (z.B. Summe) Ergänzungsangaben wie das Signal der Stellenüberschreitung. Diese können durch das Operationszeichen nicht wiedergegeben werden. In solchen Fällen muß Kennzeichnung der Werte durch Planzeichen bzw. Resultatzeichen (z.B. R8.10) erfolgen.

Die eigentliche Rechenoperation stellt in solchem Falle nur eine Einschmelzform des gesamten Plans dar. Derartige Einschmelzungen können auch in bezug auf die Stellenzahl z.B. des Resultats vorgenommen werden.

Im folgenden wird eine Aufstellung der Rechenpläne homogener Struktur gegeben. Dies sind solche, in denen als Angaben nur Zahlen der gleichen Struktur vorkommen, wobei allerdings die Resultatwerte Ja-Nein-Werte sein können. (Aussagen über Zahlen z.B. a > b.)

Es sind natürlich auch Rechenpläne zwischen Zahlen verschiedener Struktur möglich, wie die Übersetzung einer Zahlenart in eine andere (z.B. vom Dez-System ins ~~Sek~~-System). Diese werden zunächst nicht behandelt.

Die Aufstellung der Rechenpläne erfolgt zunächst durch Unterteilung in folgende Gruppen:

1) Aussagen über einzelne Zahlen
2) Operationen mit einzelnen Zahlen
3) Aussagen über Zahlenpaare
4) Operationen mit Zahlenpaaren
5) Operationen mit Zahlenmengen.

Diese Gruppierung entspricht nicht einer logischen Entwicklung der einzelnen Operationen auseinander. In den einzelnen Plänen sind zum Teil erst später angeführte enthalten.

Von einer axiomatischen Darstellung wird zunächst abgesehen. Die bekannten Axiomensysteme, z.B. das von Peano stellen implizite Lösungen der Zahlen und ihrer Operationen dar, die durch verschiedene Strukturen und Rechenpläne befriedigt werden können. Um aus diesen allgemeinen Axiomensystemen die Rechenregeln spezieller Zahlenstrukturen zu gewinnen, müßten für diese Strukturen zusätzliche Axiome eingeführt werden.

Die Plannummerierung erfolgt allgemein bezüglich Gruppe 8 (z.B. P8.3); anstelle von 8 kpnnen die Zahlen 9, 10, 11, 12, 13 treten, je nach Art der zu verwendenden Zahlen.

Übersicht über die Rechenpläne mit Zahlen.

1) Aussagen über Zahlen:

Plan-zeichen	Operations-zeichen	Rand-Auszug	Bemerkung	Seite
P8.0	$Pos(\underset{\substack{0\\8}}{V})$	$R(\underset{\substack{0\\8}}{V}) \Rightarrow \underset{\substack{0\\0}}{R}$	„V_0 ist positiv oder gleich Null"	
P8.1	$Gz(\underset{\substack{0\\8}}{V})$	"	„V_0 ist eine ganze Zahl"	
P8.2	$Ger(\underset{\substack{0\\8}}{V})$	"	„V_0 ist eine gerade Zahl"	
P8.3	$\underset{\substack{0\\8}}{V} = 0$	"		
P8.4		"	„V_0 ist eine ganze Potenz von 2"	

2) Operationen mit einem Operanden:

Plan-zeichen	Operations-zeichen	Rand-Auszug	Bemerkung	Seite
P8.8 V A	V + 1 ⇒ R o o 8 8	R(V) ⇒ (R,R) o o 1 8 8 o	R = Signal 1 „Stellen- erhöhung"	
P8.9 V A	V − 1 ⇒ R o o 8 8	"	"	
P8.10	V × 2 ⇒ R o o 8 8	"	"	
P8.11	V × $\frac{1}{2}$ ⇒ R o o 8 8	"	"	
P8.12	V ×10 ⇒ R o o 8 8	"	"	
P8.13	V × $\frac{1}{10}$ ⇒ R o o 8 8	"	"	
P8.16	V^2 ⇒ R o o 8 8	"	"	
P8.17	1 : V ⇒ R o o 8 8	"	"	
P8.18	$\sqrt[2]{V}$ ⇒ R o o 8 8	"	"	
P8.19	$\sqrt[3]{V}$ ⇒ R o o 8 8	"	"	

Plan-zeichen	Operations-zeichen	Rand-Auszug	Bemerkung	Seite
P8.22 V A	V × (−1) ⇒ R o o 8 8	R(V) ⇒ R o o 8 8	Vorzeichen-umkehrung	
P8.23 V A	|V| ⇒ R o o 8 8	"	Absolut-wertbildung	
P8.24 V A	sign(V) ⇒ R o o 8 10		V≥0 → R = +1 o o V<0 → R = −1 o o	
P8.25 V A	Fpos(V) ⇒ R o o 8 8	"	V≥0 → R = V o o o V<0 → R = 0 o o	
P8.26		"	Erhöhung der Stellenzahl	
P8.27		"	Auf gerade Stellenzahl bringen	
P8.28		"	Bildung der nächstkleineren ganzen Zahl	
P8.29		"	Bildung der nächstgrößeren ganzen Zahl	
P8.30		"	Bildung der nächsten geraden Zahl	

3) Aussagen über Zahlenpaare.

Plan- zeichen	Operations- zeichen	Rand-Auszug	Bemerkung	Seite
P8.48 V A	V = V o 1 8 8	R(V,V) ⇒ R o 1 o 8 8 o		
P8.49 V A	V < V o 1 8 8	"		
P8.50 V	V ⩽ V o 1 8 8	"		

4) Operationen mit zwei Operanden.

P8.64 V A	V + V ⇒ R o 1 o 8 8 8	R(V,V)⇒(R,R) o 1 o 1 8 8 8 o	R=Aussage: 1 „Stellen- erhöhung"	
P8.65 V A	V - V ⇒ R o 1 o 8 8 8	"	R=„Resultat 1 kleiner als Null"	
P8.66 V A	V - V ⇒ R 1 o o 8 8 8	"	"	
P8.67 V A	V × V ⇒ R o 1 o 8 8 8	"	R=Stellen- 1 erhöhung	
P8.68 V A	V : V ⇒ R o 1 o 8 8 8	"	"	
P8.69 V A	Maj(V,V) ⇒R o 1 o 8 8 8	R(V,V) ⇒ R o 1 o 8 8 8	Der größere von zwei Wer- ten	
P8.70 V A	Min(V,V) ⇒R o 1 o 8 8 8	"	Der kleinere von zwei Wer- ten	

Plan-zeichen	Operations-zeichen	Rand-Auszug	Bemerkung	Seite
P8.72	$V \times B^{V_1} \Rightarrow R$	$R(\underset{8}{\overset{0}{V}}, \underset{8}{\overset{1}{V}}) \Rightarrow R$	B = Basis des Zahlen-systems	
P8.80		$R(\underset{1n}{\overset{o}{V}}, \underset{1m}{\overset{1}{V}}) \Rightarrow (\underset{1}{\overset{o}{R}}, \underset{1}{\overset{1}{R}})$	1=Maj(m,n) Auf gleiche Stellenzahl bringen	

Dan

III. Rechenpläne mit positiven ganzen ~~Sek~~-Zahlen.

(A9.2)

1) Aussagen über einzelne Zahlen:

```
P9.2   |   | R(V) => R  | V̄ => R          | gerade Zahl
A9.2   | V |  o      o  | o    o          |
       | K |            | o               |
       | S | 1.n     o  | o    o          |
-------+------------------------------------+--------------
P9.3   |        "     | Λ θ (V) => R     | V = 0
A9.2   |            V |      o     o     | o
       |            S |     1.n    o     |
-------+------------------------------------+--------------
P9.4   |        "     | R1.9(V) => R     | ganze Potenz
A9.2   |            V | o    o     o     | von 2
       |            S |     1.n    o     |
```

2) Operationen mit einem Operanden:

```
P9.8   | Vorwärtszählen  | R(V)  =>  R    , R |
A9.2   |               V |  o        o      1 |
       |               S | 1.n     1.n+1    o |

       |   | + => Z | W [ μV => Z | Z ~ Z => μR | Z ∧ Z => Z ]
       | V |      o |     o    1  | o   1     o  | o   1    o
       | K |        |             |              |
       | S |      o |   [ o    o  | o   o     o  | o   o    o ]

       |   | Z => μR | Z => R           R₁ = Signal „Stel-
       | V | o     o | o    1                lenerhöhung"
       | K |         |
       | S | o     o | o    o
-------+---------------------------------------------------------
P9.9   | Rückwärtszählen              R₁ = Signal „Vorzeichenwechsel"
A9.2   |   | - => Z | W [ μV => Z | Z ~ Z => μR | Z ∨ Z => Z ]
       | V |      o |     o    1  | o   1     o  | o   1    o
       | S |      o |   [ o    o  | o   o        |            ]

       |   |          Z̄ => R
       | V |          o    1
       | S |          o    o
-------+---------------------------------------------------------
P9.10  | Verdoppelung  (Rand-Auszug wie bei P9.8)
A9.2   |                              R₁ = Signal „Stellenerhöhung"
       |   | - => R | iW [ V => R   ] | V => R |
       | V |      o |      o    o   | | o    1 |
       | K |      o |      i   i+1  | | n-1    |
       | S |      o |    [ o    o   ] | o    o |
```

P9.11 A9.2	Halbierung

```
P9.11 | Halbierung  R(V   ) ⇒ (R   ,R)    R  = Signal „Rest vor-
A9.2  |               o        o   1      1               handen"
      |               1.n      1.n o

      |   |  - ⇒ R   | iW [ V ⇒ R  ]  1 ≤ i < n | V ⇒ R
      | V |      o   |    [ o   o  ]            | o   1
      | K |      n-1 |    [ i   i-1]            | o
      | S |      o   |    [ o   o  ]            | o   o
```

```
P9.12 | x 10  |  R(V   ) ⇒ (R     ,R)    R  = Signal „Stellen-
      |     V |    o        o      1      1              erhöhung"
      |     S |    1.n      1.n+4  o

      | Implizite Darstellung: (V × 2 × 2 + V) × 2 ⇒ R
      |                         o           o         o

      |   | R9.10(V   ) ⇒ (Z     ,Z) | Z ⇒ VR
      | V | o      o        o      1 | 1    1
      | S |        1.n      1.n+1  o | o    o

      |   | R9.10(Z      ) ⇒ Z      | R9.64(Z      ,(V „--))⇒(Z      ,Z)
      | V | o      o         o      |       o        o          o      1
      | S |        1.n+1     1.n+2  |       1.n+2    1.n+2      1.n+3  o

      |   | Z ⇒ VR | R9.10(Z      ) ⇒ (R      ,Z) | Z ⇒ VR
      | V | 1    1 |       o            o       1 | 1    1
      | S | o    o |       1.n+3        1.n+4   o | o    o
```

~~P8.13~~
~~A9.2~~

```
P9.16 |  V² ⇒ R      |R(V   ) ⇒ (R   ,R) | R  = Signal „Stellen-
A9.2  |  o    o    V | o        o    1   |  1              erhöhung"
      |            S | 1.n      1.m  o   |

      |   | R9.67(V   ,V   ) ⇒ (R   ,R)
      | V |       o    o        o    1
      | A |       9.2  9.2      9.2  o
```

```
P9.17 |  1 : V ⇒ R        Sinnlos für ganze Zahlen
A9.2  |      o   o
```

```
P9.18 |  ²√V ⇒ R     |R(V   ) ⇒ (R   ,R) | R  = Signal „Rest vor-
      |    o    o  V | o        o    1   |  1              handen"
      |            S | 1.n      1.n  o   |
```

Das Resultat soll auch eine ganze Zahl sein. Im allgemeinen wird es also keine exakte Lösung geben. Als R_0 wird der größte Wert genommen, dessen Quadrat kleiner oder gleich V_0 ist. Wir haben dann folgenden impliziten Ansatz für R_0:

```
  |   | Max (x̂(x² ≤  V)) ⇒ R
  |   |              o      o
  | A | 9.2     9.2         9.2
```

R_1 gibt an, ob ein Rest vorhanden ist.

$$R_0^2 \neq V_0 \Rightarrow R_1$$

Die Bildung von R_0 erfolgt nach dem Verfahren der quadratischen Ergänzung. Das Resultat wird ziffernweise, angefangen mit der höchsten Ziffer, gebildet. Für einen solchen „Aufbauwert" Z_0 von R_0, d.h. einen solchen, aus dem R_0 durch Hinzufügen von weiteren Ziffern entsteht, gilt:

$$0 \leq Z_0 \leq R_0 \qquad ;$$

ferner gilt: $(0 \leq a \leq b) \to a^2 \leq b^2$.

Hieraus ergibt sich:

$$R_0^2 \leq V_0 \to (Z_0)^2 \leq V_0 \quad .$$

Für die erste in $\sqrt{V_0}$ enthaltene Potenz von 2, welche mit $Z_{1.0}$ bezeichnet sei, muß also gelten:

$$\mathrm{Max}\left[\hat{x}\left(R9.4(x) \wedge x^2 \leq V_0\right)\right] \Rightarrow Z_{1.0}$$

R9.4 = Bedingung, daß x eine ganze Potenz von 2 ist.

Für die Bildung der weiteren Ziffern $Z_{1.i}$ muß dann gelten:

$$\mathrm{Max}\left[\hat{x}\left(R9.4(x) \wedge (Z_0 + x)^2 \leq V_0\right)\right] \Rightarrow Z_{1.i}$$

Hierbei ist Z_0 der „Aufbauwert" des Resultats R_0 . Das neue Z_0 ergibt sich jeweils aus dem alten durch Addieren von Z_1 .

Wir können jetzt folgenden Ansatz für Z_0 und R_0 hinschreiben:

$$0 \Rightarrow Z_0 \,\Big|\, W\left[Z_0 < V_0 \to \left[\mathrm{Max}\left[\hat{x}\left(R9.4(x) \wedge (Z_0+x)^2 \leq V_0\right)\right] \Rightarrow Z_1 \,\Big|\, Z_0 + Z_1 \Rightarrow Z_0\right]\right]$$

$$Z_0 \Rightarrow R_0$$

In diesem Ansatz ist der Ansatz für $Z_{1.0}$ mit enthalten, dadurch daß das erste $Z_0 = 0$ gesetzt wird. Die Indices i bei Z_0 und Z_1 können nach der Regel für das $\Rightarrow$ Zeichen fortfallen.
Zunächst kann die Menge der für x in Frage kommenden Werte eingeschränkt werden auf diejenigen Potenzen von 2, deren Quadrate kleiner oder gleich V_0 sind.
Ferner vereinfacht sich das Rechenverfahren, wenn diese Potenzen von 2 der Größe nach geordnet werden, so daß die größte zuerst aufgezählt ist. Die Liste dieser Werte sei mit Z_3 bezeichnet:

$$\mathrm{Ord2}\left[\hat{x}\left(R9.4(x) \wedge x^2 \leqslant V_0\right)\right] \Rightarrow Z_3$$

Anstelle von $\mathrm{Max}\left[\hat{x}\left(R9.4(x) \wedge (Z_0 + x)^2 \leqslant V_0\right)\right]$

kann jetzt gesetzt werden:

$$\mu x \left[x \in Z_3 \wedge (Z_0 + x)^2 \leqslant V_0\right]$$

Hierin wird der Ausdruck $(Z_0 + x)^2 \leqslant V_0$

ersetzt durch den Ausdruck: $V_0 - Z_0^2 - (2Z_0x+x^2) \geqslant 0$

Wir erhalten dann als neuen Ansatz für R_0:

$$0 \Rightarrow Z_0 \;\Big|\; \mathrm{Ord2}\left[\hat{x}\left(R9.4(x) \wedge x^2 \leqslant V_0\right)\right] \Rightarrow Z_3$$

$$W\left[\mu x\left[x \in Z_3 \wedge \left(V_0 - Z_0^2 - (2 Z_0 x + x^2) \geqslant 0\right)\right] \Rightarrow Z_1 \;\Big|\; Z_0 + Z_1 \Rightarrow Z_0\right]$$

$$Z_0 \Rightarrow R_0$$

Es empfiehlt sich jetzt die Einführung eines laufenden Zwischenwertes $Z_2 = V_0 - Z_0^2$, da hierdurch die jeweils neue Bildung von $V_0 - Z_0^2$ erspart werden kann.

Es gilt:

$$Z_{0.i} + Z_{1.i} = Z_{0.i+1}$$

$$(Z_{0.i+1})^2 = (Z_{0.i} + Z_{1.i})^2 = Z_{0.i}^2 + 2\, Z_{0.i} \times Z_{1.i} + Z_{1.i}^2$$

$$Z_{1.i} = x$$

$$(Z_{0.i+1})^2 = Z_{0.i}^2 + 2\, Z_{0.i}\, x + x^2$$

$$V_0 - (Z_{0.i+1})^2 = V_0 - Z_{0.i}^2 - (2\, Z_{0.i}\, x + x^2) = Z_{2.i+1}$$

$$V_0 - (Z_{0.i})^2 = Z_{2.i}$$

$$Z_{2.i+1} = Z_{2.i} - (2\, Z_{0.i} \times x + x^2)$$

Dementsprechend können wir obigen W-Ausdruck wie folgt schreiben:

$$W\left[\mu x\left[x \in Z_3 \wedge Z_2 - (2 Z_o x + x^2) \geq 0\right] \Rightarrow Z_1 \,\Big|\, Z_2 - (2 Z_o Z_1 + Z_1 + Z_1^2) \Rightarrow Z_2 \,\Big|\, Z_o + Z_1 \Rightarrow Z_o\right]$$

Da es sich bei Operationen mit Zahlen um starre bzw. quasistarre Rechenpläne handelt, empfiehlt es sich, den μ=Ausdruck durch einen i=Ausdruck zu ersetzen.

Hierfür gilt folgende Regel:

$$\frac{V}{S}\,\Big|\, W\left[\mu x\left(x \in \underset{n\times\sigma}{V_o} \wedge R(x)\right) \Rightarrow Z_o \,\Big|\, P\right]$$

$$\hat{=}\; W1(N(V_o)) \left[R(V_{o,i}) \rightarrow \left[V_{o,i} \Rightarrow Z_o \,\Big|\, P\right]\right] \quad 0 \leq i < n$$

Bei Anwendung dieser Vorschrift auf den vorliegenden Fall sind folgende Ersetzungen vorzunehmen:

μ=Ausdruck	i=Ausdruck
V_o	Z_3
$R(u)$	$Z_2 - (2Z_o u + u^2) \geq 0$
Z_o	Z_1
P	$Z_2 - (2 Z_o Z_1 + Z_1^2) \Rightarrow Z_2 \,\Big|\, Z_o + Z_1 \Rightarrow Z_o$

Es ergibt sich dann:

$$\frac{V}{K}\,\Big|\, W1(N(Z_3)) \left[\left[Z_2 - (2 Z_o Z_{3,i} + Z_{3,i}^2) \geq 0\right] \rightarrow \left[Z_{3,i} \Rightarrow Z_1 \,\Big|\, Z_2 - (2 Z_o Z_1 + Z_1^2) \Rightarrow Z_2 \,\Big|\, Z_o + Z_1 \Rightarrow Z_o\right]\right]$$

$N(Z_3)$ ist die Anzahl der in Z_3 enthaltenen Potenzen von 2. Diese sind eine Funktion der Stellenzahl von V_o.

Durch Ersetzen von Z_1 durch $Z_{3.i}$ und Einführung des Zwischenwertes Z_4 vereinfacht sich der Ausdruck:

$$W1(N(Z_3)) \left[Z_2 - (2 Z_o Z_{3,i} + Z_{3,i}^2) \Rightarrow Z_4 \,\Big|\, Z_4 \geq 0 \rightarrow \left[Z_4 \Rightarrow Z_2 \,\Big|\, Z_o + Z_{3,i} \Rightarrow Z_o \right]\right]$$

Wir haben jetzt folgenden Ansatz für R_0 :

$$0 \Rightarrow z_0 \mid V_0 \Rightarrow z_2 \mid \mathrm{Ord2}\left[\hat{x}\left(R9.4(x) \wedge x \leq V_0^2\right)\right] \Rightarrow z_3$$

$$W1(N(z_3))\left[z_2 - (2\, z_0\, z_{3.i} + z_{3.i}^2) \Rightarrow z_4 \mid z_4 \geq 0 \rightarrow \left[z_4 \Rightarrow z_2 \mid z_0 + z_{3.i} \Rightarrow z_0\right]\right]$$

$$z_0 \Rightarrow R_0$$

Hierin sind noch verschiedene Operationen enthalten, die sich in diesem speziellen Fall besonders vereinfachen lassen. Nicht alle im obigen Ausdruck enthaltenen Additionen und Multiplikationen sind tatsächlich auszuführen.

Wir betrachten zunächst die Liste z_3 .

Die Schwierigkeit der Bildung der Liste $\hat{x}\left(R9.4(x) \wedge x \leq V_0^2\right)$ läßt sich dadurch umgehen, daß wir stattdessen den Ausdruck

$$S \mid \hat{x}_{1.n}\left(R9.4(x_{1.n}) \wedge x^2 \leq 2^n\right)$$

bilden, wobei n gleich der Stellenzahl von V_0 ist. Es sind dies diejenigen Potenzen von 2, deren Quadrat mit der Stellenzahl n noch gebildet werden kann. Falls die erste Ziffer von V_0 = L ist, ist diese Liste gleich der gesuchten. Sonst kann sie umfangreicher sein. Es kann daher nicht zu Fehlern führen, wenn für das weitere mit dieser Liste gearbeitet wird.

Wir führen daher eine <u>neue Definition</u> von z_3 ein:

$$\mathrm{Ord2}\left[\hat{x}\left(R9.4(x) \wedge x^2 \leq 2^n\right)\right] \Rightarrow z_3 .$$

Für n = 8 bzw. n = 9 ist z_3 z.B. durch folgende Liste gegeben:

$$z_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{L000} \\ \mathrm{L00} \\ \mathrm{L0} \\ \mathrm{L} \end{bmatrix}$$

Wir stellen eine Tabelle mit den Gliedern der Liste, ihren Gliednummern und ihren Quadraten auf. m ist hierbei die Gliedzahl der Liste. Im Beispiel ist m = 4 .

	i	$z_{3.i}$	$(z_{3.i})^2$	m-1-i
	0	L000	L000000	3
	1	L00	L0000	2
	2	L0	L00	1
m-1	3	L	L	0

Jetzt betrachten wir die Ausdrücke des Rechenplans, in denen z_3 vorkommt.

$$\begin{array}{ccccc} z & + & z & \Rightarrow & z \\ 0 & & 3 & & 0 \\ & & i & & \end{array}$$

Die hier vorgeschriebene Addition gestaltet sich besonders einfach, da bei dem Summanden $z_{3.i}$ immer nur eine Ziffer gleich Eins sein kann. Außerdem muß in dieser Stelle der andere Summand die Ziffer Null haben. Dies ergibt sich aus dem Aufbau von z_0, welches stufenweise durch Hinzufügen immer kleinerer Potenzen von 2 gebildet wird, wobei im ganzen Bildungsprozeß jede Ziffer nur einmal auftreten kann. Es gilt

$$z_{3.i} = 2^{(m-1-i)}$$

(Entgegengesetzte Nummerierung von z_3. Siehe Tabelle.)

Wir können den Ausdruck
$$\begin{array}{c|ccccc} & z & + & z & \Rightarrow & z \\ V & 0 & & 3 & & 0 \\ K & & & i & & \end{array}$$

also ersetzen durch den Ausdruck
$$\begin{array}{c|ccc} & + & \Rightarrow & z \\ V & & & 0 \\ K & & & m-1-i \end{array}$$

Wir untersuchen jetzt den Ausdruck

$$\begin{array}{ccc} 2 & z & z \\ & 0 & 3 \\ & & i \end{array}$$

dieser ist wegen $z_{3.i} = 2^{(m-1-i)}$

gleich $2\, z_0 \cdot 2^{(m-1-i)} = z_0 \cdot 2^{m-i} = \begin{array}{l} R9.72(z_0,\ m-i) \\ A9.2 \end{array}$

Es bleibt jetzt noch der Ausdruck $\left(z_{\substack{3\\i}}\right)^2$.

$$\left(z_{\substack{0\\i}}\right)^2 = \left(2^{(m-1-i)}\right)^2 = 2^{2(m-i)-2}$$

Es gilt daher:

$$\begin{array}{c|ccccccccc} & 2 & z & \cdot & z & + & z^2 & = & z \cdot 2^{m-i} & + \; 2^{2(m-i)-2} \\ V & & 0 & & 3 & & 3 & & 0 & \\ K & & & & i & & i & & & \end{array}$$

Die hier noch verbliebene Addition kann ebenfalls noch vereinfacht werden:

$z^2_{3.i}$ ist eine Zahl, bei der nur eine Ziffer gleich Eins ist.
Es zeigt sich nun wieder, daß der andere Summand an der gleichen Stelle eine Null aufweisen muß.

Es gilt:

$$\begin{array}{c|ccccc} & z & + & z & \Rightarrow & z \\ V & 0 & & 3 & & 0 \\ K & & & i & & \end{array} ,$$

bzw. wenn wir das ⇒Zeichen durch das =Zeichen ersetzen:

$$\begin{array}{c|ccccc} & z & + & z & = & z \\ V & 0.i & & 3 & & 0.i+1 \\ K & & & i & & \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccccc} z & + & z & = & z \\ 0.i-1 & & 3 & & 0.i \\ & & i-1 & & \end{array}$$

es gilt ferner:

$$\begin{array}{c|ccc} & z & = & 2^{m-i} \\ V & 0 & & \\ K & i-1 & & \end{array} \quad \text{folglich:} \quad z_{0.i-1} + 2^{m-i} = z_{0.i}$$

Es soll jetzt bewiesen werden:

$$z_{0.i} = a_i \cdot 2^{m-i} , \quad a = \text{ganzzahlig} .$$

Gilt dieser Satz für i-1 , so gilt er auch für i .

$$z_{0.i-1} = a_{i-1} \cdot 2^{m-i+1}$$

$$z_{0.i-1} + 2^{m-i} = a_{i-1} \cdot 2^{m-i+1} + 2^{m-i} = 2^{m-i}(2a_{i-1} + 1) = a_i \cdot 2^{m-i} = z_{0.i}$$

Hierbei gilt: $2a_{i-1} + 1 = a_i$

Nun ist $z_{0.0} = 0$; es gilt aber $0 = a \cdot 2^n$ für beliebiges n, wobei $a = 0$ ist. Folglich ist der aufgestellte Satz bewiesen.

$$z_{0.i} = a_i \cdot 2^{m-i} , \quad a = \text{ganzzahlig} .$$

Es ergibt sich nun:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 2\,z & \cdot & z & = & 2a \cdot 2^{m-i} \cdot 2^{m-i-1} & = & a \cdot 2^{2(m-i)} \\ V & 0.i & & 3 & & i & & i \\ K & & & i & & & & \end{array}$$

Ferner wurde bereits gefunden:

$$\begin{array}{c|ccccc} & z^2 & = & 2^{2(m-i)-2} & = & 2^{2(m-i)} : 4 \\ V & 3 & & & & \\ K & i & & & & \end{array}$$

Folglich gilt:

$$\begin{array}{c|l} & 2\;\; z \times z \;:\; z^2 = a \times 4 \\ V & \;\;\;\; 0 \;\;\; 3 \;\;\;\;\; 3 \;\;\;\;\;\;\; i \\ K & \;\;\;\;\;\;\;\;\; i \;\;\;\;\; i \end{array}$$

Da a_i ganzzahlig ist, und $z^2_{3,i}$ eine ganze Potenz von 2 ist, ist somit bewiesen, daß der erste Summand in der Stelle, in der der zweite eine Eins aufweist, eine Null haben muß.

Wir können also anstelle von

$$z_0 \cdot 2^{m-i} + 2^{2(m-1)-2} = z_5 \quad \text{setzen}$$

$$\begin{array}{c|l|l} & z \cdot 2^{m-i} \Rightarrow z & + \Rightarrow z \\ V & 0 \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 5 & \;\;\;\;\;\;\;\; 5 \\ K & & \;\;\;\;\;\;\;\; 2(m-i)-2 \end{array}$$

Hierbei wurde ein neuer Zwischenwert z_5 eingeführt.

Wir brauchen jetzt noch die Bestimmung von m (Gliedzahl der Liste z_3) als Funktion der Stellenzahl von V_0.

$$m = N(z_3) = F(N(V_0))$$

Ist die Stellenzahl n von V_0 gerade, so gilt

$$m = \frac{n}{2} .$$

Ist die Stellenzahl n von V_0 ungerade, so gilt

$$m = \frac{n+1}{2} .$$

Diese Beziehung wird durch R9.11 gegeben.

$$\begin{array}{c|l} & R9.11(N(V)+1) \Rightarrow m \\ V & 0 \\ A & 9.2 \end{array}$$

Wir können jetzt den Ausdruck für $R_0 = \sqrt[2]{V_0}$ neu ansetzen:

$$\begin{array}{c|llll}
 & R9.11(N(V)+1) & \Rightarrow & m \\
V & 0 \quad\quad\quad\; 0 & & \\
A & 9.2 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|lll|lll}
 & 0 & \Rightarrow & z & V & \Rightarrow & z \\
V & & & 0 & 0 & & 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
 & W1(m) \left[\begin{array}{llll|lll|lllll}
z & \cdot 2^{m-i} & \Rightarrow & z & + & \Rightarrow & z & z & - & z & \Rightarrow & z \\
0 & & & 5 & & & 5 & 2 & & 5 & & 4 \\
 & & & & & & 2(m-i)-2 & & & & & \\
9.2 & & & 9.2 & & & 0 & 9.2 & & 9.2 & & 10.2
\end{array} \right. \\
 & \left. \begin{array}{lll}
z & \geqslant 0 \rightarrow & \left[\begin{array}{lll|lll}
z & \Rightarrow & z & + & \Rightarrow & z \\
4 & & 2 & & & 0 \\
 & & & & & m-i-1 \\
10.2 & & 9.2 & & & 0
\end{array} \right] \\
4 & & \\
 & & \\
10.2 & &
\end{array} \right]
\end{array}$$

(Zeilenbezeichnungen links: V, K, A)

$$\begin{array}{c|lll}
 & z & \Rightarrow & R \\
V & 0 & & 0 \\
A & 9.2 & & 9.2
\end{array}$$

Dieser Ansatz ist äußerlich zwar komplizierter, als der von S.17, ist aber rechnerisch einfacher.

Es läßt sich hierin nun noch durch Einführung eines Zwischenwertes z_6 die Operation

$$z_0 \cdot 2^{m-i} \quad \text{eliminieren.}$$

Es wird an Stelle von z_0 laufend der Wert

$$z_6 = z_0 \cdot 2^{m-i} \quad \text{gebildet .}$$

Für z_0 gilt folgendes Bildungsgesetz:

$$\begin{array}{c|lll|l}
 & 0 & \Rightarrow & z & W1(m) \left[\begin{array}{llll}
z(i) \geqslant 0 \rightarrow (+ & \Rightarrow & z &) \\
4 & & 0 & \\
 & & m-i-1 &
\end{array} \right] \\
V & & & 0 & \\
K & & & &
\end{array}$$

Entsprechend gilt für $z_6 = z_0 \cdot 2^{m-i}$

$$\begin{array}{c|lll|l}
 & 0 & \Rightarrow & z & W1(m) \left[\begin{array}{llll|llll}
z(i) \geqslant 0 \rightarrow (+ & \Rightarrow & z &) & z & \times \frac{1}{2} & \Rightarrow & z \\
4 & & 6 & & 6 & & & 6 \\
 & & (m-i-1)+(m-i) & & & & &
\end{array} \right] \\
V & & & 6 & \\
K & & & &
\end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{c|lll|l}
 & 0 & \Rightarrow & z & W1(m) \left[\begin{array}{llll|llll}
z \geqslant 0 \rightarrow (+ & \Rightarrow & z &) & z & \times \frac{1}{2} & \Rightarrow & z \\
4 & & 6 & & 6 & & & 6 \\
 & & 2(m-i)-1 & & & & &
\end{array} \right] \\
V & & & 6 & \\
K & & & &
\end{array}$$

Es empfiehlt sich nun noch, den Ausdruck

$\underset{6}{z} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \underset{6}{z}$ vor den Ausdruck $\underset{4}{z} \geq 0 \rightarrow (\;.\;.\;)$

zu setzen. Entsprechend den Regeln des $\Rightarrow$Zeichens bezieht sich der Ausdruck

$$+ \Rightarrow \underset{\substack{6\\2(m-i)-1}}{z}$$

dann aber auf das neue $\underset{6}{z}$, also $\underset{6.i+1}{z}$;

da dieses gegenüber $\underset{6.i}{z}$ um eine Stelle abwärts verschoben ist $(\times\frac{1}{2})$, so muß auch das +=Zeichen um eine Stelle tiefer gesetzt werden. Also

$$+ \Rightarrow \underset{\substack{6\\2(m-i)-2}}{z}$$

Es ergibt sich also folgendes Bildungsgesetz für $\underset{6}{z}$:

$$\begin{array}{l} \\ V \\ K \end{array} \Bigg| \; 0 \Rightarrow \underset{6}{z} \; \Bigg| \; W1(m) \left[\underset{6}{z} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \underset{6}{z} \; \Bigg| \; \underset{4}{z} \geq 0 \rightarrow \left(+ \Rightarrow \underset{\substack{6\\2(m-i)-2}}{z}\right) \right]$$

Es muß nun noch R_0 anstatt aus z_0 aus z_6 abgeleitet werden:

$$\underset{6.i}{z} = \underset{0.i}{z} \cdot 2^{m-i} \quad \Big| \quad \underset{0.i}{z} = \underset{6.i}{z} \cdot 2^{i-m}$$

Letzter Ansatz für $\underset{6}{z}$: $\underset{6.i}{z} \times \frac{1}{2} = \underset{6.i+1}{z}$

Letzter i=Wert = m-1

$$(i = m-1) \rightarrow \underset{0}{z} = \underset{6}{z}\, 2^{(m-1+1)-m} = \underset{6}{z} \cdot 2^0 = \underset{6}{z}$$

Es gilt also $\underset{6}{z} \Rightarrow \underset{0}{R}$.

```
  | R9.11(N(V)+1) ⇒ m
V | o         o
A | 9.2

  | 0 ⇒ z | V ⇒ z
V |     6 | o   2

  | W1(m) [ z    ⇒ z   | + ⇒ z          | z   -  z   ⇒  z   | z × 1/2 ⇒ z ]
V |         6      5   |     5          | 2      5      4   | 6         6
K |                    |     2(m-i)-2   |                   |
A |         9.2    9.2 |     o          | 9.2    9.2    10.2| 9.2
  |
  |       [ z     ≥0 → [ z    ⇒ z   | + ⇒ z        ]                    ]
V |         4            4      2   |     6                             
K |                                 |     2(m-i)-2                      
A |       [ 10.2       [ 10.2   9.2 |     o        ]                    ]

  | z    ⇒ R   | z     ≠ 0 ⇒ R
V | 6      o   | 4           1
A | 9.2    9.2 | 10.2        o
```

Für die endgültige Formulierung von P9.18 werden nun noch des klareren Aufbaus wegen Umbenennungen der Zwischenwerte vorgenommen:

Alter Ausdruck	Neuer Ausdruck
z_2	z_0
z_4	z_3
z_5	z_2
z_6	z_1

○ Zahlen in den Kreisen beziehen sich auf S.25

```
P9.18    |   | R(V   ) => (R   ,R)
A9.2   V |   |   o         o    1
       A |   |  9.2       9.2   o

 (1)     | V | R9.11(N(V)+1) => m
         |   | o       o
         | A | 9.2

 (2)(3)  | V | V     => z  | 0 => z
         |   | o        o  |      1
         | A | 9.2     9.2 |     9.2

                  (4)           (4)               (5)                    (6)
         | V | W1(m)[z   => z  | + => z          |z    -z    =>z      |z  x 1/2 =>z  ]
         | K |      1       2  |      2          |o     2      3      |1          1
         | A |                 |      2(m-1)-2   |                    |              
         |   |      9.2    9.2 |      o          |9.2  9.2   10.2     |9.2       9.2 ]
                  (7)
         | V |      z     >=0 ->[z     => z   | + => z        ]
         | K |      3           3         o   |      1         
         | A |                                |      2(m-1)-2  
         |   |      10.2        10.2     9.2  |      o        ]  ]
                  (9)          (10)
         | V |      z     => R | z     ≠ 0 => R
         |   |      1        o | 3            1
         | A |      9.2    9.2 | 10.2         o
```

Bedeutung der Werte:

V_0	Radikand
R_0	$\sqrt[2]{V_0}$, ganzzahliger Teil
R_1	„Rest vorhanden"
z_0	Abbauwert des Radikanden (V_0 minus dem Quadrat des Radikanden, soweit dies bereits gebildet)
z_1	Aufbauwert des Resultats multipliziert mit einer ganzen Potenz von 2
z_2	laufender Subtrahend (quadratische Ergänzung)
z_3	laufender Rest .

Beschreibung der Vorschrift in Worten.

① Nimm die Stellenzahl des Radikanden V_0, addiere 1 und halbiere diesen Wert. Der ganzzahlige Teil ist der Wert m [Stellenzahl des Resultats].

② [Der Radikand wird durch fortgesetzte Subtraktion abgebaut. Der laufende Abbauwert (nach jeder Subtraktion verbleibender Rest von V_0) ist z_0].

V_0 ergibt das erste z_0.

③ [Der laufende Subtrahend ist das im Lauf der Operation aufzubauende Resultat, multipliziert mit einer ganzen Potenz von 2, und ergänzt durch die quadratische Ergänzung. z_1 dient der Bildung des Subtrahenden].

Der erste Wert von z_1 ist gleich 0.

④ Aus dem Zwischenwert z_1 wird der Subtrahend z_2 gebildet, indem die Ziffer der Stelle 2(m-i)-2 von z_1 gleich L gesetzt wird. [Es wird mit i = 0 begonnen].

⑤ Bilde die Differenz $z_0 - z_2$, diese ist gleich z_3.

⑥ z_1 um eine Stelle abwärts verschoben ergibt das neue z_1.

⑦ Ist z_3 größer oder gleich Null, so ergibt z_3 das neue z_0. Ferner ist in diesem Falle die neue Ziffer des Resultats = L. Diese wird auf die Stelle 2(m-i)-2 des Wertes z_1 übertragen.

Ist z_3 kleiner als Null, so bleibt z_0 ungeändert.

⑧ Erhöhe i um Eins. Ist das neue i kleiner als m, so gehe zurück zu 4. Ist i = m, so gehe über zu 9.

⑨ z_1 ergibt den gesuchten ganzzahligen Teil R_0 der Wurzel aus V_0.

⑩ Ist der letzte Wert z_3 ungleich 0, so ist ein Rest vorhanden. R_1 ist positiv, sonst negativ.

Aus diesem allgemeinen Ansatz sei der spezielle für eine bestimmte Stellenzahl von V_0 entwickelt.

Der Ansatz 1), Bildung von m, ist dann für alle Variationen von V_0 konstant.

Beispiel n = 6 . m = R9.11(LLo+L) = LL = 3 .

L

P9.18
S1.6

$$\begin{array}{ccc|ccc} V & \Rightarrow & z & 0 & \Rightarrow & z \\ 0 & & 0 & & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|ccccc|cccc} & z & \Rightarrow & z & + & \Rightarrow & z & z & - & z & \Rightarrow & z & z & \times\frac{1}{2} & \Rightarrow & z \\ V & 1 & & 2 & & & 2 & 0 & & 2 & & 3 & 1 & & & 1 \\ K & & & & & & 4 & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc|cccc} & z & \geq 0 \rightarrow & [& z & \Rightarrow & z & + & \Rightarrow & z &] \\ V & 3 & & [& 3 & & 0 & & & 1 &] \\ K & & & [& & & & & & 4 &] \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|ccccc|cccc} & z & \Rightarrow & z & + & \Rightarrow & z & z & - & z & \Rightarrow & z & z & \times\frac{1}{2} & \Rightarrow & z \\ V & 1 & & 2 & & & 2 & 0 & & 2 & & 3 & 1 & & & 1 \\ K & & & & & & 2 & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc|cccc} & z & \geq 0 \rightarrow & [& z & \Rightarrow & z & + & \Rightarrow & z &] \\ V & 3 & & [& 3 & & 0 & & & 1 &] \\ K & & & [& & & & & & 2 &] \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|ccccc|cccc} & z & \Rightarrow & z & + & \Rightarrow & z & z & - & z & \Rightarrow & z & z & \times\frac{1}{2} & \Rightarrow & z \\ V & 1 & & 2 & & & 2 & 0 & & 2 & & 3 & 1 & & & 1 \\ K & & & & & & 0 & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc|cccc} & z & \geq 0 \rightarrow & [& z & \Rightarrow & z & + & \Rightarrow & z &] \\ V & 3 & & [& 3 & & 0 & & & 1 &] \\ K & & & [& & & & & & 0 &] \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccccc} & z & \Rightarrow & R & z & \neq & 0 & \Rightarrow & R \\ V & 1 & & 0 & 3 & & & & 1 \\ K & & & & & & & & \end{array}$$

Für diesen Rechenplan seien schließlich noch einige Zahlenbeispiele gegeben.

Beispiel 1 : V_0 = LOOLLO [38]. Andere Schreibweise:

	z_0, z_2, z_3		z_1
	Stelle 543210		Stelle 543210
z0.0	LOOLLO	z1.0	000000
z2.0	OLOOOO		
z3.0	+OLOLLO		
z0.1	OLOLLO	z1.1	OLOOOO
z2.1	OLOLOO		
z3.1	+OOOOLO		
z0.2	OOOOLO	z1.2	OOLLOO
z2.2	OOLLOL		
z3.2	-OOLOLL		
		z1.3	OOOLLO

```
√LOOLLO = LLO
 L
 LOLLO
 LOL
 OOOLO
   LLOL
-  LOLL
```

R_0 = LLO (6) , R_1 = +

Beispiel 2 : V_0 = LLOOL (25)

	z_0, z_2, z_3		z_1
	543210		543210
z0.0	OLLOOL	z1.0	000000
z2.0	OLOOOO		
z3.0	+OOLOOL		
z0.1	OOLOOL	z1.1	OLOOOO
z2.1	OLOLOO		
z3.1	-OOLOLL		
z0.2	OOLOOL	z1.2	OOLOOO
z2.2	OOLOOL		
z3.2	OOOOOO		
		z1.3	OOOLOL

```
√LLOOL = LOL
 L
  LOOL
  LOOL
  OOOO
```

R_0 = LOL (5) , R_1 = –

Dipl.-Ing. K. Zuse
Ingenieurbüro
und Apparatebau
Berlin

E!

P9.19 — $\sqrt[3]{V_0}$. Vorerst nicht behandelt.

P9.22 bis P9.25 haben keinen Sinn bei stets positiven Zahlen.

P9.26
A9.2

Erhöhung der Stellenzahl

$$\begin{array}{c|ccc} & R(V\;) & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 0 \\ S & 1.n & & 1.n+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & - & \Rightarrow & R \\ V & & & 1 \\ K & & & n+1 \\ S & & & 0 \end{array} \; W1(n) \left[\begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i \\ 0 & & 0 \end{array}\right]$$

Beispiel:
V_0 = LL

R_0 = OLL

Wert der Zahl bleibt ungeändert.

P9.27
A9.2

Auf gerade Stellenzahl bringen.

$$\begin{array}{c|ccc} & R(V\;) & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 0 \\ S & 1.n & & 1.m \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \\ V & \\ K & W1(n) \\ S & \end{array} \left[\begin{array}{ccc} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 1 \\ i & & i \\ 0 & & 0 \end{array}\right]$$

$$R9.2(n) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} - & \Rightarrow & R & n+1 & \Rightarrow & m \\ & & 0 & & & \\ & & n & & & \\ & & 0 & & & \end{array}\right] \Bigg\| \quad \overline{R}9.2(n) \rightarrow (n \Rightarrow m)$$

Beispiel 1:
V_0 = LOL
R_0 = OLOL

Beispiel 2:
V_0 = LOOO
R_0 = LOOO

E!

P9.28 und P9.29 haben keinen Sinn für ganze Zahlen.

P9.30
A9.2

Bildung der nächsten geraden Zahl.

Vorerst nicht nötig.

3) Aussagen über Zahlenpaare:

Bei allen Rechenplänen, bei denen 2 oder mehr Zahlen als Ausgangswerte beteiligt sind, wird vorausgesetzt, daß diese von gleicher Stellenzahl sind.

Ist dies nicht der Fall, so muß der Wert der kleineren Stellenzahl durch wiederholte Anwendung der Regel P9.26 auf die Stellenzahl des größeren gebracht werden.

P9.80 $R(V_{\substack{0\\1.n}}, V_{\substack{1\\1.m}}) \Rightarrow (R_{\substack{0\\l}}, R_{\substack{1\\l}}) \;\Big|\; l = Maj(m, n) \;\Big|\; V_{0} = R_{0} \;\Big|\; -V_{1} = R_{1}$

$$m \geq n \rightarrow \left[V_{\substack{1\\1.m}} \Rightarrow R_{\substack{1\\1.m}} \;\Big|\; R9.26^{(m-n)}\;(V_{\substack{0\\1.n}}) \Rightarrow R_{\substack{0\\1.m}} \right]$$

$$m < n \rightarrow \left[V_{\substack{0\\1.n}} \Rightarrow R_{\substack{0\\1.n}} \;\Big|\; R9.26^{(n-m)}\;(V_{\substack{1\\1.n}}) \Rightarrow R_{\substack{1\\1.n}} \right]$$

P9.48
P9.49
P9.50 Diese Pläne sind durch die Pläne P1.68, P1.72, P1.74 für allgemeine Strukturen S1.n vorweggenommen (Kap. 2, S.89).

4) Operationen mit zwei Operanden:

Bezüglich der Stellenzahl gilt das auf S.29 gesagte.

P9.64
A9.2

	V	+	V	⇒	R	
V	0		1		0	
	1.n		1.n		1.n+1	

R_1 = Signal „Stellenerhöhung"

	−	⇒	z	W1(n)	[V	∼	V	⇒	z	(V	∧	V) ∨ (z	∧	z)	⇒ z	z	∼	z	⇒	R]
V			0		0		1		1	0		1	1	0	0	1		0		0
K					i		i		i	i		i	i	i	i+1	i		i		i
S					0		0		0	0		0	0	0	0	0		0		0

	z	⇒	R	z	⇒	R
V	0		0	0		1
K	n		n	n		
S	0		0	0		0

P9.65
A9.2

	V	−	V	⇒	R
V	0		1		0
S	1.n		1.n		1.n

R_1 = Signal „Res negativ"
In diesem Falle stellt R_0 ein Supplement dar.

	+	⇒	z	W1(n)	[V	∼	V	⇒	z	(V	∧	V) ∨ (z	∧	z)	⇒ z	z	∼	z	⇒	R]
V			0		0		1		1	0		1	1	0	0	1		0		0
K					i		i		i	i		i	i	i	i+1	i		i		i

	z	⇒	R
V	0		1
K	n		0

P9.66
A9.2

	V	−	V	⇒	R
V	1		0		0
K	1.n		1.n		1.n

R_1 wie R_1 9.65

Wie P9.65, jedoch V_1 mit V_0 vertauscht.

P9.67
A9.2

Multiplikation:

Für den allgemeinen Fall der Strukturen muß sowohl V_0 als auch V_1 auf die Stellenzahl 1.n gebracht werden.

$$\begin{array}{ccccc} V & \times & V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 1 & & 0 \\ 1.1 & & 1.m & & 1.n \end{array}$$

Es ergibt sich dann der Normalfall:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & V & \times & V & \Rightarrow & R & R \\ V & 0 & & 1 & & 0 & 1 \\ S & 1.n & & 1.n & & 1.n & 0 \end{array}$$

R = Signal „Stellenüberschreitung"
1
o

Implizite Darstellung von R_0

$$\begin{array}{c|ccccccc|} & \Sigma & Ub(V, & V) \cdot 2^i & \Rightarrow & R \\ V & i & 0 & 1 & & 0 \\ K & & i & & & \end{array}$$

Ub( ) siehe Kap. 2 S.7

Explizite Form:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} & 0 & \Rightarrow & z & V & \Rightarrow & z \\ V & & & 0 & 1 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & W1(n) \left[\begin{array}{ccccccc|ccccc} z & + & Ub(V, & z) & \Rightarrow & z & & z & \times & 2 & \Rightarrow & z \\ 0 & & 0 & 1 & & 0 & & 1 & & & & 1 \\ & & i & & & & & & & & & \end{array} \right] \\ V & \\ K & \end{array} \quad \begin{array}{|ccc} z & \Rightarrow & R \\ 1 & & 0 \end{array}$$

P9.67 mit Signal

$$\begin{array}{c|cccccc} & R(V & , & V &) \Rightarrow & (R & , R) \\ V & 0 & & 1 & & 0 & 1 \\ S & 1.n & & 1.n & & 1.n & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} & 0 & \Rightarrow & z & V & \Rightarrow & z \\ V & & & 0 & 1 & & 1 \\ S & & & 1.n & 1.n & & 1.n \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & W1(n) \left[\begin{array}{cccccc|cccc} R9.64(z & ,Ub(V, & z &) \Rightarrow (z & , Vz) & & R8.10(z &) \Rightarrow (z & , Vz) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & & 1 & 1 & 2 \\ & i & & & & & & & \\ 1.n & 0 & 1.n & 1.n & 0 & & & 1.n & 1.n \end{array} \right] \\ V & \\ K & \\ S & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} z & \Rightarrow & R & , & z & \Rightarrow & R \\ 1 & & 0 & & 2 & & 1 \end{array}$$

P9.68
A9.2

Division:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & V & : V & \Rightarrow R & R_1 = \text{„Rest vorhanden"} \\ V & 0 & 1 & 0 & \\ S & 1.n & 1.n & 1.n & \end{array}$$

E!

Die genaue Ableitung müßte entsprechend P9.18 $\sqrt[2]{V_0}$ erfolgen. Hier wird nur das Ergebnis angeführt.

Implizite Darstellung:

$$\mathrm{Max}\left[\hat{x}(V_1 \times x \leqslant V_0)\right] \Rightarrow R_0 \;\Big|\; (V_1 \times R_0 \neq 0) \Rightarrow R_1$$

Explizite Form:

$$V_0 \Rightarrow z_0 \,,\; V_1 \Rightarrow z_1 \,,\; 0 \Rightarrow \varepsilon \;\Big|\; 0 \Rightarrow z_3$$

$$W\left[z_0 > z_1 \rightarrow \left[z_1 \times 2 \Rightarrow z_1 \;\Big|\; \varepsilon + 1 \Rightarrow \varepsilon\right]\right]$$

$$\begin{array}{c|l} V & W\left[z_0 - z_1 \Rightarrow z_2 \;\Big|\; z_2 \geqslant 0 \rightarrow \left[z_2 \Rightarrow z_0\right] \;\Big|\; + \Rightarrow z_{3\,\varepsilon} \right. \\ K & \left. (z_2 = 0) \vee (\varepsilon = 0) \rightarrow \mathrm{Fin}^2 \right] \end{array}$$

$$z_3 \Rightarrow R_0 \;\Big|\; z_2 \neq 0 \Rightarrow R_1$$

Bedeutung der Werte:

V_0 = Dividend

V_1 = Division Or

R_0 = $V_0 \div V_1$ $V_0 : V_1$

R_1 = „Rest vorhanden"

z_0 = Abbauwert des Dividenden (Rest)

z_1 = Divisor $\times 2^k$

z_2 = $z_0 - z_1$

z_3 = Aufbauwert des Resultats .

Anmerkung zu P9.68 .

Anstelle des Ausdrucks $\begin{array}{ccc} z & > & z \\ 0 & & 1 \end{array}$ kann besser der Ausdruck R9.68.1(z_0, z_1) treten, wobei gilt:

P9.68.1

$$\begin{array}{c|cccc} & R(V & , V &) \Rightarrow & R9.68.1 \\ V & 0 & 1 & & 0 \\ S & 1.n & 1.n & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 \Rightarrow \varepsilon \;\Big|\; W\left[\begin{array}{ccc} V \wedge & \overline{V} \Rightarrow & z \\ 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \end{array} \Big| \begin{array}{ccc} V \vee & V \vee (\varepsilon = n-1) \rightarrow & \text{Fin}^2 \\ 0 & 1 & \\ \varepsilon & \varepsilon & \end{array} \Big| \; \varepsilon + 1 = \varepsilon \right] \\ \begin{array}{ccc} z & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \end{array} \end{array}$$

R_0 bedeutet: „Die höchste Ziffer von V_0 liegt höher als die höchste Ziffer von V_1".

P9.69
A9.2

$$\begin{array}{cccc} \text{Maj}(V & , V &) \Rightarrow & R \\ 0 & 1 & & 0 \\ 1.n & 1.n & & 1.n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} V \geq & V \Rightarrow & z & \Big| \; z \rightarrow (V \Rightarrow & R) \; \Big| \; \overline{z} \rightarrow (V \Rightarrow R) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \quad\; 0 \qquad 0 & 0 \quad\; 1 \qquad 0 \end{array}$$

P9.70
A9.2

$$\begin{array}{cccc} \text{Min}(V & , V &) \Rightarrow & R \\ 0 & 1 & & 0 \\ 1.n & 1.n & & 1.n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} V \geq & V \Rightarrow & z & \Big| \; z \rightarrow (V \Rightarrow & R) \; \Big| \; \overline{z} \rightarrow (V \Rightarrow R) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \quad\; 1 \qquad 0 & 0 \quad\; 0 \qquad 0 \end{array}$$

P9.72
A9.2

$$\begin{array}{c|ccc} & V & \times 2^{V_1} \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 0 \\ A & 9.2 & & 9.2 \end{array}$$

Bessere Schreibweise:

$$\begin{array}{cccc} V & \times 2 & V \Rightarrow & R \\ 0 & & 1 & 0 \\ 9.2 & & 9.2 & 9.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} R(V & , V &) \Rightarrow & R \;\; 1.(n + V) \\ 0 & 1 & & 0 \qquad\qquad\; 1 \\ 1.n & 1.m & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{ccc} V \Rightarrow & z & \Big| \; V \Rightarrow \varepsilon \; \Big| \\ 0 & 0 & \;\; 1 \end{array} W\left[\varepsilon \neq 0 \rightarrow \left[\begin{array}{cc} R9.10(z) \Rightarrow & z \\ 0 & 0 \end{array} \Big| \; \varepsilon - 1 \Rightarrow \varepsilon \right]\right] \\ \begin{array}{ccc} z & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \end{array} \end{array}$$

P9.80

Siehe S.29.

IV. Rechenpläne mit positiven und negativen ganzen Dual ~~Sek~~-Zahlen.

Supplement-Darstellung. (A10.2.0)

Es werden nur einige Proben gegeben.

P10.0

$$\begin{array}{c|cccc} & Pos(V &) & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & & 0 \\ S & 1.n & & & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & \overline{V} & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 0 \\ K & n-1 & & \\ S & 0 & & 0 \end{array}$$

P10.2 $\left.\begin{array}{l} Ger(V_0) \\ \\ V_0 = 0 \end{array}\right\}$ wie $\begin{array}{l} P9.2 \\ \\ P9.3 \end{array}$ **P10.3**

P10.4 V_0 ist eine ganze Potenz von 2

$$\begin{array}{c|cccccccccc} & [\overline{V} & \rightarrow R1.9(V &)] & \wedge & [V & \rightarrow R1.7(& R1.17(& V &))] & \Rightarrow R10.4 \\ V & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ K & n-1 & & & & n-1 & & & & & \\ S & 0 & 1.n & & & 0 & & & 1.n & & 0 \end{array}$$

Beispiele: $n = 3$

000	= 0
0L0	= +2
LL0	= −2
L00	= −4

P10.8

$V_0 + 1 \Rightarrow R10.8_0$, $R10.8_0$ wie $R9.8_0$

$$\begin{array}{cccc} R & \wedge \overline{R} & \Rightarrow & R \\ 0 & 0 & & 0 \\ n-1 & n & & \end{array}$$

P10.9

$V_0 - 1 \Rightarrow R10.9_0 = R9.9_0$

$$\begin{array}{cccc} \overline{R} & \wedge R & \Rightarrow & R \\ 0 & 0 & & 1 \\ n-1 & n & & \end{array}$$

P10.18

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|ccc} & R(V &) & \Rightarrow (R & ,R) & R9.18(|V| &) & \Rightarrow & R & V & \Rightarrow & R \\ V & 0 & & 0 & 1 & 0 & & & 0 & 0 & & 1 \\ A & 10.2.0 & & & & 1.n & & & & n-1 & & \end{array}$$

$R_0 \Rightarrow \sqrt[2]{|V_0|}$, $R_1 =$ „Imaginär" .

P10.22

$$\begin{array}{lllllll} V\times(-1)\ . & R10.8(\ominus & V &)\Rightarrow(& R & , & R) \\ 0 & & 0 & & 0 & & 1 \\ & & 1.n & & 1.n & & 0 \end{array}$$

P10.23

$$|\underset{0}{V}|\ .\quad \begin{array}{l|lllll|llllll} & V & \rightarrow(V & \Rightarrow R &) & & V & \rightarrow(R10.8(\ominus & V &))\Rightarrow(& R & ,R) \\ V & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ K & n-1 & & & & & n-1 & & & & & \\ S & 0 & 1.n & 1.n & & & 0 & & 1.n & & 1.n & 0 \end{array}$$

P10.24

$$\mathrm{sign}(\underset{0}{V})\ .$$

$$W1(n)\left[\begin{array}{ll} V & \Rightarrow R \\ 0 & 0 \\ n-1 & i \end{array}\right] \left|\ \begin{array}{l} +\Rightarrow R \\ \quad\ \ 0 \\ \quad\ \ 0 \end{array}\right.$$

P10.25

$$\mathrm{Fpos}(\underset{0}{V})\ .\quad \mathrm{Pos}(\underset{0}{V}) \rightarrow (\underset{0}{V} \Rightarrow \underset{0}{R})$$

$$\overline{\mathrm{Pos}}(\underset{0}{V}) \rightarrow (0 \Rightarrow \underset{0}{R})$$

P10.26 Erhöhung der Stellenzahl um Eins.

$$\begin{array}{l|llll|} & R(V &) & \Rightarrow & R \\ V & \ \ 0 & & & 0 \\ S & \ \ 1.n & & & 1.n+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & W1(n) \end{array} \left[\begin{array}{lll} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ i & & i \\ 0 & & 0 \end{array}\right] \left|\ \begin{array}{lll} V & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \\ n-1 & & n \\ 0 & & 0 \end{array}\right.$$

(Zeilen: V, K, S)

P10.72

$$\begin{array}{lll} V^{V_1} & \Rightarrow & R \\ 0 & & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l|llll} & R(V & ,V &)\Rightarrow(R & ,R) \\ V & \ \ 0 & \ \ 1 & \ \ 0 & \ \ 1 \\ A & \ \ 10.2.0 & \ \ 10.2.0 & \ \ 10.2.0 & \\ S & \ \ 1.n & \ \ 1.m & \ \ 1.n & \ \ 0 \end{array}$$

Eine Stellenerhöhung findet nicht statt. R_1 ist das Signal, daß der gegebene Stellenbereich nicht ausreicht.

Im allgemeinen gilt:

$$\begin{array}{l|lll} & V & \Rightarrow R & \left\lceil i + \underset{1}{V} \right. \\ V & 0 & \ \ \ 0 & \\ K & i & & \\ S & 0 & & \end{array}$$

jedoch darf i hier nur soweit variiert werden, daß gilt: $0 \leq i + V_1 < n$.

$0 \leq i + V_1 < n$

Dies läßt sich durch folgenden Ansatz erreichen:

$$\begin{array}{c|cccccccccc} & W1(n)\Big[& 0 \le i + & V & < n \rightarrow \Big[& V & \Rightarrow & R & - i + & V & \Big]\Big] \\ V & & & 1 & & o & & o & & 1 & \\ K & & & & & i & & & & & \\ S & & & & & o & & & & & \end{array}$$

Die hierdurch noch nicht bestimmten Stellen von R_o ergeben sich wie folgt:

a) Ist $\underset{1}{V}$ größer als Null, so werden die Stellen 0 bis $\underset{1}{V}-1$ gleich 0 gesetzt:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & V & > 0 \rightarrow \big(W1(& V & -1)\big)\Big[& - \Rightarrow & R & \Big] \\ V & 1 & & 1 & & & o & \\ K & & & & & & i & \end{array}$$

gelesen: „Wiederholungsvorschrift 1 mit der Begrenzung $\underset{1}{V}-1$ angewandt auf [ ]".

Da nun aber $\underset{1}{V}$ größer als n sein kann, so muß in diesem Fall W1 durch n-1 begrenzt sein. Der allgemeine Ausdruck für die Begrenzung von W1 ist:

$$Min(\underset{1}{V}-1,\ n-1)$$

Es ergibt sich dann folgender Ausdruck:

$$\begin{array}{cccccc} V & > 0 \rightarrow \Big[W1\big(Min(V,\ n)\big)\Big[& - \Rightarrow & R & \Big]\Big] \\ 1 & & & o & \\ & & & i & \end{array}$$

b) Ist $\underset{1}{V}$ negativ, so müssen die Stellen R_{n-1} bis R_{n-1+V_1} gleich der höchsten Stelle von V_o gesetzt werden. Denn im Falle, daß diese Stelle eine Eins aufweist, bedeutet dies, daß V_o negativ ist, und alle höheren, nicht geschriebenen Stellen ebenfalls gleich Eins sind. Es ergibt sich also der Ansatz:

$$\begin{array}{cccccccc} V & < 0 \rightarrow \Big[\big(W1(| & V & |)\big)\Big[& V & \Rightarrow & R & \Big]\Big] \\ 1 & & 1 & & o & & o & \\ & & & & n-1 & & n-1-i & \end{array}$$

Auch hier gilt wieder, daß $|\underset{1}{V}|$ größer sein kann als n.
Dementsprechend muß der Ansatz wie folgt ergänzt werden:

$$\begin{array}{cccccccc} V & < 0 \rightarrow \Big[\Big(W1\big(Min(| & V & |+1,\ n)\big)\Big)\Big[& V & \Rightarrow & R & \Big]\Big] \\ 1 & & 1 & & o & & o & \\ & & & & n-1 & & n-1-i & \end{array}$$

Schließlich muß noch das Kriterium für R_1 gebildet werden.
R_1 kann nur im Falle $V_1 > 0$ positiv werden, und zwar wenn bei V_0 in den V_1 Stellen n-1 bis n-1-V_1 eine Ziffer auftritt, die von $\begin{array}{c} V \\ 0 \\ n-1 \end{array}$ verschieden ist!
(Es sind dies die Ziffern, die beim Aufwärtsschieben verloren gehen.)
Es gilt also:

$$\begin{array}{l} V > 0 \\ 1 \end{array} \rightarrow \left[\left(\mathrm{Min}\begin{array}{l}(V\;\;,n)\\ \;\;\;1\end{array}\right) \left[\begin{array}{lll} (V & \sim V &) \Rightarrow R \\ 0 & 0 & \quad\;\; 1 \\ n-1-i & n-1 & \end{array} \right] \right]$$

Dieser Ansatz kann mit dem Ansatz von S.36 zusammengefaßt werden.

Wir haben also folgenden Gesamtansatz:

P10.72
A10.2.0

$$\begin{array}{l|llllll} & R(V & , V &) \Rightarrow (R & , R) \\ V & \;\;0 & \;\;1 & \;\;0 & \;\;1 \\ A & 10.2.0 & 10.2.0 & 10.2.0 & \\ S & 1.n & 1.m & 1.n & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & \mathrm{W1}(n) \left[\begin{array}{l} 0 \leq i + V < n \\ \qquad\quad\;\, 1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{lll} V = R & i & + V \\ 0 \quad\; 0 & & \quad\; 1 \\ i & & \end{array} \right] \right] \\ V & \\ K & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & \begin{array}{l} V > 0 \\ 1 \end{array} \rightarrow \left[\left(\mathrm{W1}\left(\mathrm{Min}\begin{array}{l}(V,\; n)\\ \;\;\;1\end{array}\right)\right) \left[\begin{array}{l|lll} - \Rightarrow R & V & \sim V & \Rightarrow R \\ \qquad\;\; 0 & 0 & \;\;0 & \quad\;\; 1 \\ \qquad\;\; i & n-1-i & n-1 & \end{array} \right] \right] \\ V & \\ K & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & \begin{array}{l} V < 0 \\ 1 \end{array} \rightarrow \left[\left(\mathrm{W1}\left(\mathrm{Min}\begin{array}{l}(|V|+1,\; n)\\ \;\;\;\;1\end{array}\right)\right) \left[\begin{array}{ll} V & \Rightarrow R \\ 0 & \quad\; 0 \\ n-1 & \quad n-1-i \end{array} \right] \right] \\ V & \\ K & \end{array}$$

V. Operationen mit positiven ganzen Dezimalzahlen.

1) Aufbau der Zahlen. A9.10 = n × S1.4 .

Die einzelnen Komponenten entsprechen den Dezimalziffern. Diese werden als 4-stellige Sekundalzahlen dargestellt:

0	OOOO
1	OOOL
2	OOLO
3	OOLL
4	OLOO
5	OLOL
6	OLLO
7	OLLL
8	LOOO
9	LOOL

Beispiele für Dezimalzahlen: n = 4 .

	Ziffer 3	Ziffer 2	Ziffer 1	Ziffer 0
305 =	OOOO	OOLL	OOOO	OLOL
1792 =	OOOL	OLLL	LOOL	OOLO

2) Operationen mit Dez-Zahlen.

P9.64
A9.10 $\quad V_{0\ 9.10} + V_{1\ 9.10} = R_{0\ 9.10}$ | R_1 = Meldung „Stellenbereich überschritten"

$$\begin{array}{c|l} & R(V_0, V_1) \Rightarrow (R_0, R_1) \\ V & \\ S & \quad n\times 1.4 \quad n\times 1.4 \qquad (n+1)\times 1.4 \quad o \end{array}$$

Die Bildung der Summe erfolgt ziffernweise. Es wird zuerst je Stelle aus den Werten V_0 und V_1 die Ziffernsumme $z_{o.i}$ gebildet. $\overset{o}{i}$ $\overset{1}{i}$
Dieses ist eine 5-stellige Sek-Zahl. Findet eine Übertragung $z_{1.i}$ von der Stelle i-1 auf die Stelle i statt, so muß $z_{o.i}$ noch um Eins erhöht werden.

Ist der so gebildete Wert $z_{o.i}$ größer als OLOOL (9), so muß (10) subtrahiert werden, und dafür eine Übertragung $z_{1.i+1}$ auf die Stelle z_{i+1} stattfinden.

LOLL

Auf die erste Stelle findet keine Übertragung statt

```
[- ⇒ z  ] .
     1.o
```

Wir erhalten dann folgenden Ansatz:

```
    - ⇒ z
        1.o

  | W(n) [ V    + V    ⇒ z   | z   →[z   + 1 ⇒ z   ]
V |        o      1      o.i | 1.i  [o         o   ]
K |        i      i          |      [              ]
S |        1.4    1.4    1.5 | o    [1.5       1.5 ]

  |        z   ≥ OLOLO ⇒ z
V |        o.i           1.i+1
S |        1.5           o

  |        z     →[z   - LOLO ⇒ z  ]| z   ⇒ R
V |        1.i+1  [o              o ]| o     o
K |               [                 ]|       i
S |        o      [1.5            1.5]| 1.5   1.4 ]

  | z̄   →[O ⇒ R  ]   z →[OOOL ⇒ R  | + ⇒ R]
V | 1.n  [     o  ]   1   [       1  |     1]
K |      [     n  ]       [       n  |      ]
S | o    [     1.4]   o   [       1.4|      ]
```

In dieser Formel können auf Grund der Regel des „Ergibt"-Zeichens die Unterindices bei $\underset{o}{z}$ und $\underset{1}{z}$ noch fortgelassen werden.

Diese Formel soll nach verschiedenen Gesichtspunkten abgewandelt werden:

1) Anstelle der Subtraktion von LOLO (10) soll die Addition des Supplements erfolgen.

   Das Supplement zu LOLO ist:

```
   .OOLOLO
   -------
   .LLOLOL
 +       L
   -------
   .LLOLLO
```

   Da die Differenz $\underset{o}{z}$ - LOLO einen Wert zwischen 0 und 9 ergeben muß, so interessieren nur die untersten 4 Ziffern des Supplements.

   Wir können also schreiben:

```
   z + OLLO ⇒ z
   o          o
```

2) Anstelle der allgemeinen Operationszeichen sollen die speziellen Planzeichen für die betreffenden Zahlenarten und Stellenzahlen gesetzt werden.

Wir haben im ersten Falle $(V_{0\,i} + V_{1\,i})$ die Addition zweier 4-stelliger ~~Sek-~~ Zahlen und als Ergebnis eine 5-stellige Sek-Zahl. Der betreffende Plan ist $\underset{A9.2}{P9.64}$ für $n = 4$.

Dieser sei mit <u>P9.100</u> bezeichnet.

$$P9.100 = \underset{A9.2}{P9.64} \quad n = 4 \;.$$

Bei der Operation $z_0 + 1$ handelt es sich um $R9.8(z_0)_0$.

Im Falle z_0 + OLLO handelt es sich um die Addition zweier 4-stelliger Sekundal-Zahlen, wobei das Ergebnis ebenfalls 4-stellig ist. Es ist das eine Einschmelzform von P9.100 ohne $R_{0\,4}$.

Dieser Plan sei mit P9.101 bezeichnet.

$$P9.101 = P9.100, \; (R9.100_{0\,0}, R9.100_{0\,1}, R9.100_{0\,2}, R9.100_{0\,3}) \Rightarrow R9.101_{0}$$

Aus z_0 , welches 5-stellig ist, wird noch der 4-stellige Zwischenwert z_2 gebildet, unter Fortlassung der Ziffer $z_{0\,4}$.

Wir erhalten dann folgenden Ansatz:

```
  | - => z
V |      1
S |      o

  | W1(n) [ R9.100(V    ,V   ) => z | z -> R9.8(z   ) => z ]
V |       [ o       o    1        o | 1          o        o ]
K |       [         i    i          |                       ]
S |       [         1.4  1.4    1.5 | o          1.5    1.5 ]
  |       [                                                 ]
  |       [ z   >= OLOLO => z | (z, z, z, z) => z           ]
V |       [ o                1 |  o  o  o  o      2          ]
K |       [                    |  o  1  2  3                 ]
S |       [ 1.5              o |  o  o  o  o      1.4        ]
  |       [                                                 ]
  |       [ z -> [R9.101(z   , OLLO) => z ] z    => R       ]
V |       [ 1    [        2             2 ] 2       o       ]
K |       [      [                        ]         i       ]
S |       [ o    [        1.4         1.4 ] 1.4     1.4     ]

  | W         [ - => R ] | z => R   | z => R
V | i=(1,2,3) [      o ] | 1    o   | 1    1
K |           [      n.i ]|     n.o  |
S |           [      o ] |          |
```

Hierbei ist noch eine andere Darstellung von $\underset{\substack{o\\n}}{R}$ gewählt.

3) Es soll nun die Operation R9.8$(\underset{o}{z})$ eliminiert werden.
Es gilt zunächst:

$$(\underset{o}{z} > \mathrm{LOLO}) \rightarrow (\underset{o}{z}+1 \geq \mathrm{LOLO})$$

d.h. Im Falle $\underset{\substack{o\\i}}{V} + \underset{\substack{1\\i}}{V} \geq \mathrm{LOLO}$ hat $\underset{1.i}{z}$ keinen Einfluß auf die Bildung von $\underset{1.i+1}{z}$.

(Es findet auf jeden Fall eine Stellenübertragung $\underset{1.i+1}{z}$ auf die nächste Stelle $i+1$ statt.)

Ferner gilt:

$$\underset{o}{z} < \mathrm{LOOL} \rightarrow \overline{(\underset{o}{z} + 1) \geq \mathrm{LOLO}}$$

d.h. im Falle $\underset{oi}{V} + \underset{1i}{V}$ findet auf keinen Fall eine Stellenübertragung $\underset{1.i+1}{z}$ auf die nächste Stelle statt.

Es interessiert zur Berücksichtigung des Einflusses von $\underset{1.i}{z}$ auf $\underset{1.i+1}{z}$ also nur der Fall $z_o = \mathrm{LOOL}$.

Es gilt dann folgender Ansatz für z_1:

$$\underset{o}{\mathrm{R9.100}}(\underset{\substack{o\\i}}{V}, \underset{\substack{1\\i}}{V}) \Rightarrow \underset{o}{z} \;\Big|$$

$$(\underset{o}{z} \geq \mathrm{OLOLO}) \vee (\underset{o}{z} = \mathrm{OLOOL} \wedge \underset{1.i}{z}) \Rightarrow \underset{1.i+1}{z}$$

R9.8$(\underset{o}{z})$ ist also zur Bildung von $\underset{1.i+1}{z}$ nicht nötig.

Zur Bildung von z_o kann es mit der Addition von LLO zusammengefaßt werden.

Wir schreiben zunächst:

$$\underset{1.i}{z} \rightarrow \left[\mathrm{R9.101}(\underset{2}{z}, \mathrm{OOOL}) \Rightarrow \underset{2}{z}\right]$$

$$\underset{1.i+1}{z} \rightarrow \left[\mathrm{R9.101}(\underset{2}{z}, \mathrm{OLLO}) \Rightarrow \underset{2}{z}\right]$$

Hierbei wird z_2 je nach den Werten von $\underset{1.i}{z}$ und $\underset{1.i+1}{z}$ gar nicht oder einmal oder zweimal geändert.

Da die beiden Summanden OOOL und OLLO nicht in der gleichen Stelle eine Eins aufweisen, können die beiden

Operationen R9.101 zusammengefaßt werden.

$$\mathrm{R9.101}\left(z_{2}\;,\;(z_{1.i}\;,\;z_{1.i+1}\;,\;z_{1.i+1}\;,\;-)\right)\Rightarrow z_{2}\;.$$

Man beachte, daß hierbei die Ziffern des zweiten Summanden in anderer Reihenfolge geschrieben werden müssen.

Da z_1 ein Laufwert ist, müssen wir noch den Zwischenwert $z_3 = z_{1.i}$ einführen.

Wir erhalten somit als endgültigen Ansatz:

$$\begin{array}{l|c|l}
\mathrm{P9.64} & & - \Rightarrow z \\
\mathrm{A9.10} & V & \quad\;\; 1 \\
 & S & \quad\;\; 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
 & \mathrm{W1(n)}\left[\begin{array}{cccccc|ccc|cccccc}
\mathrm{R9.100}(& V & ,V &) & \Rightarrow & z & z & \Rightarrow & z & (z, & z, & z, & z) & \Rightarrow & z \\
0 & 0 & 1 & & & 0 & 1 & & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 \\
 & i & i & & & & & & & 0 & 1 & 2 & 3 & & \\
 & 1.4 & 1.4 & & & 1.5 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1.4
\end{array}\right. \\
V & \\
K & \\
S &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
 & (z \;\; > \mathrm{OLOLO}) \vee (z = \mathrm{OLOOL} \wedge z) \Rightarrow z \\
V & \;\;0 \qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad\qquad\qquad 1 \qquad\; 1 \\
K & \\
S & \;\;1.5 \qquad\qquad\qquad\; 1.5 \qquad\qquad\qquad\qquad 1.5
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
 & \left.\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{R9.101}(& z & , & (z, & z, & z, & -)) & \Rightarrow & R \\
 & 2 & & 3 & 1 & 1 & & & 0 \\
 & & & & & & & & i \\
 & 1.4 & & 0 & 0 & 0 & & & 1.4
\end{array}\right] . \\
V & \\
K & \\
S &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
 & \begin{array}{c} W \\ i=(1,2,3) \end{array}\left[\begin{array}{ccc} - & \Rightarrow & R \\ & & 0 \\ & & n.i \\ & & 0 \end{array}\right]\begin{array}{ccc} z & \Rightarrow & R \\ 1 & & 0 \\ & & n.0 \\ & & 0 \end{array}\left|\begin{array}{ccc} z & \Rightarrow & R \\ 1 & & 1 \\ & & \\ & & 0 \end{array}\right. \\
V & \\
K & \\
S &
\end{array}$$

VI. Die halblogarithmische Form.

(Entsprechend V_4)

1) Aufbau der Zahl:

Im algebraischen Rechengerät V_4 sind die Zahlen in der Form

$$y = 2^a \cdot b$$

dargestellt. Hierbei ist a ganzzahlig und b erfüllt die Bedingung

$$L,0 \leq b < L0,0 \quad .$$

Hierzu tritt das Vorzeichen, ferner die Imaginärangabe und ein Sonderzeichen für Ausnahmewerte.

Der Wert a kann positiv und negativ sein. Er hat ~~wird durch~~ die Angabenart A10.2.0 mit n = 7 . ~~(Der Darstellung wird die Speicherform zugrunde gelegt S.S.55 der Schaltung V_4).~~ Folgende a wird also als ganze 7-stellige Sek-Zahl dargestellt, wobei die negativen Werte als Supplemente dargestellt werden.

Der Wert b wird in der Form b = 1 + b' dargestellt. b' ist also der hinter dem Komma liegende Teil von b. Der vor dem Komma liegende Teil ist stets gleich L . Der Wert b' wird durch 22 Ja-Nein-Werte gebildet.

Das Vorzeichen, das Imaginärzeichen und das Sonderzeichen sind je ein Ja-Nein-Wert. Diese werden zu einer Gruppe von 3 Ja-Nein-Werten zusammengefaßt.

Wir haben also im ganzen folgenden Aufbau der Zahl:

K_0	K_1 (a)	K_2 (b')
I V S	6 5 4 3 2 1 0	-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11 -- -20-21-22
0 1 2	6 5 4 3 2 1 0	21 20 19 18 -- 2 1 0

S△1 = (S1.3, S1.7, S1.21)

Um das Arbeiten mit negativen Indices zu vermeiden, werden die einzelnen Stellen des Wertes b' fortlaufend, angefangen von der untersten Stelle, nummeriert. Nennt man die durch die Struktur S1.21 von b' dargestellte Sek-Zahl b", so ergibt sich b' aus b" nach der Formel:

$$b' = b'' \cdot 2^{-22} \; .$$

Die Angabe A△1 wird also durch folgende Angabenformel dargestellt:

$$A\triangle 1 = (S1.3\ ,\ A10.2.0\ ,\ A9.2)\ .$$

Die Bedeutung von Komp. 1 und 2 entsprechend S.43 gilt jedoch nur für Normalwerte. Dies wird durch

$$\overline{K\ 0.2}$$

angezeigt.

Im Falle eines Ausnahmewertes hat die Komp. 1 eine andere Bedeutung, während Komp. 2 belanglos ist.

Es werden folgende Fälle als Ausnahmewerte dargestellt:

1) Der Wert y ist „genau Null" (K1.2) .

2) Der Wert y ist „sehr klein" (K1.5)
   $|y| < 2^{-64}$

3) Der Wert y ist sehr groß (K1.4)
   $|y| \geq 2^{64}$

   } Die Grenze ist nur ein Richtwert.

   hierbei kann das Vorzeichen bekannt sein und nicht bekannt sein. (K1.3)

4) Der Wert y ist unbestimmt; er kann auch komplex sein (K1.1) .

Da sich die Größenbestimmung, sofern sie nicht entsprechend 4 völlig unbestimmt ist, entweder auf den Realteil oder den Imaginärteil der Zahl bezieht, brauchen wir zur Darstellung eine Hilfsgröße u , welche wie folgt gekennzeichnet ist: (Real(y) = Realteil von y)
(Im(y) = Imaginärteil von y).

```
  | y = V | (V  →u(y) = Real(y)) ∧ (V  →u(y) = Im(y))
V |     o |  o                       o
K |       |  o.o                     o.o
```

u(y) ist also der Wert der Zahl ohne Berücksichtigung der Imaginärangabe.

Die Sonderfälle seien noch einmal zusammengestellt:

KO IVS 012	K1 12345	Bedeutung	Kurz- zeichen
+	-++--	Null	0
+	--+-+	Sehr klein	≪
- +	--++-	Sehr groß, Vorzeichen unbest., reell	$\lvert\infty\rvert$
+ +	--++-	Sehr groß, Vorzeichen unbest., imag.	$i\lvert\infty\rvert$
--+	---+-	Sehr groß, negativ, reell	$-\infty$
-++	---+-	Sehr groß, positiv, reell	$+\infty$
+-+	---+-	Sehr groß, negativ, imag.	$-i\infty$
+++	---+-	Sehr groß, positiv, imag.	$+i\infty$
+	+----	Völlig unbestimmt	?

Im Falle der Sonderangaben unterliegt die Komponente K1 Beschränkungen, um Widersprüche zu vermeiden.
Um die Größenbestimmung von y an Hand von $A\triangle 1$ exakt und rein formal festzulegen, müssen wir folgende Formel aufsetzen:

$$\begin{array}{c|ccccl}
 & \overline{V} & \overline{\wedge V} & \overline{\vee V} & \overline{\vee V} & \rightarrow \left[\begin{array}{ll} V & \rightarrow (\mathrm{Real}(y) = u) \wedge (\mathrm{Im}(y) = 0) \\ 0 & \\ 0.0 & \\ 0 & \\ & \\ V & \rightarrow (\mathrm{Im}(y) = u) \wedge (\mathrm{Real}(y) = 0) \\ 0 & \\ 0.0 & \\ 0 & \end{array}\right] \\
V & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
K & 0.2 & 1.1 & 1.2 & 1.5 & \\
S & & & & &
\end{array} \qquad (1)$$

$$\begin{array}{c|cccl}
 & \overline{V} & \overline{\wedge V} & \overline{\vee V} & \rightarrow \left[\begin{array}{ll} V & \sim \mathrm{Pos}(u) \\ 0 & \\ 0.1 & \\ 0 & \end{array}\right] \\
V & 0 & 0 & 0 & \\
K & 0.2 & 1.1 & 1.3 & \\
S & 0 & 0 & 0 &
\end{array} \qquad (2)$$

$$\begin{array}{c|cl}
 & \overline{V} & \rightarrow \left[\begin{array}{llll} V & = \mathrm{Max}\left[\hat{x}\left(\mathrm{Gz}(x) \wedge 2^{x} \leq |u|\right)\right] & & \qquad (4a) \\ 0 & & & \\ 1 & & & \\ 10.2.0 & & & \\ 1.7 & & & \\ & & & \\ V & = \left[\left(\begin{array}{c} |V| \\ 0 \\ \\ \Delta 1 \end{array} : 2 \,\urcorner\!\llcorner \begin{array}{l} V \\ 0 \\ 1 \\ 10.2.0 \\ 1.7 \end{array}\right) - 1\right] \times 2^{22} & & \qquad (4b) \\ 0 & & & \\ 2 & & & \\ 9.2 & & & \\ 1.22 & & & \end{array}\right] \\
V & 0 & \\
K & 0.2 & \\
A & & \\
S & 0 &
\end{array}$$

Fortsetzung
S.46

$$\begin{array}{c|cc|ll}
 & V & \rightarrow & V & \sim (0 \leqslant |y| \leqslant \infty) \\
V & 0 & & 0 & \\
K & 0.2 & & 1.1 & \\
S & 0 & & 0 &
\end{array} \quad (5a)$$

$$\begin{array}{c|ll}
 & V & \sim (y = 0) \\
V & 0 & \\
K & 1.2 & \\
S & 0 &
\end{array} \quad (5b)$$

$$\begin{array}{c|ll}
 & V & \sim (y = +|u|) \vee (y = -|u|) \\
V & 0 & \\
K & 1.3 & \\
S & 0 &
\end{array} \quad (5c)$$

$$\begin{array}{c|ll}
 & V & \sim |u| \geqslant 2^{64} \\
V & 0 & \\
K & 1.4 & \\
S & 0 &
\end{array} \quad (5d)$$

$$\begin{array}{c|ll}
 & V & \sim |y| < 2^{-64} \\
V & 0 & \\
K & 1.5 & \\
S & 0 &
\end{array} \quad (5e)$$

Die Beschränkungsformel B△1 lautet:

$$\begin{array}{c|cc|cccccccccc}
 & V & \rightarrow & V & \rightarrow(& \bar{V} & \wedge & & & \bar{V} & \wedge & \bar{V} &) \\
V & 0 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & \\
K & 0.2 & & 1.1 & & 1.2 & & & & 1.4 & & 1.5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & V & \rightarrow(& \bar{V} & \wedge & V & \wedge & \bar{V} & \wedge & \bar{V} &) \\
V & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
K & 1.2 & & 1.1 & & 1.3 & & 1.4 & & 1.5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & V & \rightarrow & \bar{V} \\
V & 0 & & 0 \\
K & 1.3 & & 1.1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & V & \rightarrow(& \bar{V} & \wedge & \bar{V} & \wedge & \bar{V} &) \\
V & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
K & 1.4 & & 1.1 & & 1.2 & & 1.5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & V & \rightarrow(& \bar{V} & \wedge & \bar{V} & \wedge & \bar{V} & \wedge & \bar{V} &) \\
V & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
K & 1.5 & & 1.1 & & 1.2 & & 1.3 & & 1.4 &
\end{array}$$

Beschreibung der Definition in Worten:

1) Für den Fall, daß der Wert nicht Null, sehr klein oder unbestimmt ist $(\overline{\underset{0.2}{\underset{0}{V}} \wedge \underset{1.1}{\underset{0}{V}} \vee \underset{1.2}{\underset{0}{V}} \vee \underset{1.5}{\underset{0}{V}}})$

gilt:

Im Falle, daß das Im-Zeichen $(\underset{0.0}{\underset{0}{V}})$ negativ ist, ist der Hilfswert u gleich dem Realteil von y, und der Imaginärteil ist gleich Null.

Im Falle, daß das Im-Zeichen positiv ist, ist der Hilfswert u gleich dem Im-Teil und der Realteil ist gleich Null.

2) Für den Fall, daß der Wert nicht völlig unbestimmt ist, oder das Vorzeichen unbestimmt ist,

$$(\overline{\underset{0.2}{\underset{0}{V}} \wedge \underset{1.1}{\underset{0}{V}} \vee \underset{1.3}{\underset{0}{V}}})$$

gilt: $\underset{0.1}{\underset{0}{V}}$ ist gleich dem Vorzeichen von u (also normalerweise, wenn y reell, auch von y).

4) Im Falle, daß keine Sonderangabe vorliegt, $(\underset{0.2}{\underset{0}{V}})$

gilt:

a) Die Komponente 1 von $\underset{0}{V}$ ist gleich der höchsten ganzen (positiven oder negativen) Potenz von 2, welche kleiner oder gleich u absolut genommen ist (Wert a für $u = 2^a \cdot b$)

b) Die Komponente 2 von $\underset{0}{V}$ ist gleich dem Faktor, mit dem die durch Komp.1 gekennzeichnete Potenz von 2 (2^a) multipliziert werden muß, um u zu erhalten, vermindert um 1 und multipliziert mit 2^{21}.

$(u = 2^a \cdot b = 2^a \cdot (1+b') = 2^a \cdot 1 + b'' \cdot 2^{-22})$.

5) Im Falle einer Sonderangabe $(\underset{0.2}{\underset{0}{V}})$ gilt:

a) $\underset{1.1}{\underset{0}{V}}$ bedeutet, daß y jeden beliebigen (auch komplexen) Wert annehmen kann.

b) $\underset{1.2}{\underset{0}{V}}$ bedeutet, daß y genau Null ist.

Dipl.-Ing. K. Zuse
Ingenieurbüro
und Apparatebau
Berlin

c) $\underset{1.3}{\underset{o}{V}}$ bedeutet, daß das Vorzeichen von y unbestimmt ist.

d) $\underset{1.4}{\underset{o}{V}}$ bedeutet, daß der Absolutbetrag des Wertes u sehr groß ist.

e) $\underset{1.5}{\underset{o}{V}}$ bedeutet, daß der Absolutbetrag von y sehr klein ist.

Die Beschränkungsformel besagt lediglich, daß keine Widersprüche im Falle von Sonderangaben auftreten können.

Es ist noch zu beachten, daß die angegebenen Grenzen für „sehr groß" und „sehr klein" nur Richtwerte darstellen.

2) Operationen mit A△1 .

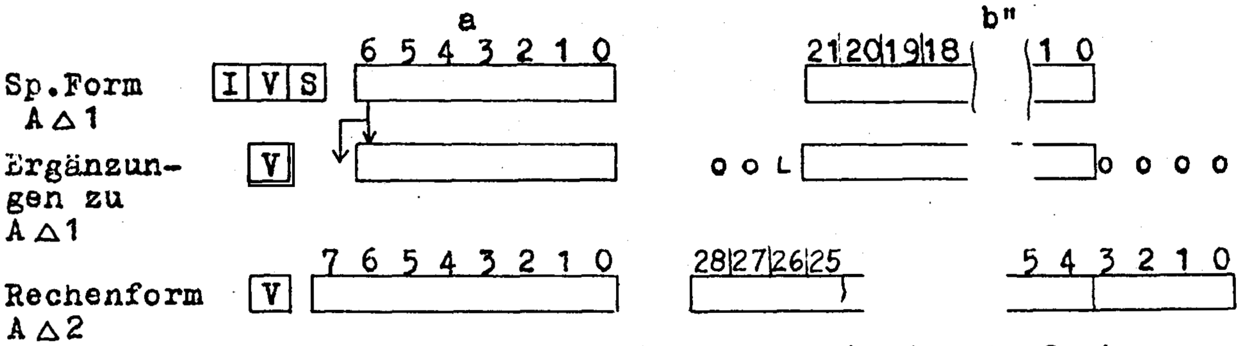
Es wird zunächst nur die Addition dargestellt.

$$P\triangle 64 = \underset{A\triangle 1}{P8.64} \qquad R(\underset{A\triangle 1}{\underset{o}{V}}, \underset{A\triangle 1}{\underset{1}{V}}) \Rightarrow \underset{A\triangle 1}{\underset{o}{R}}$$

Wir behandeln zunächst den Fall, daß beide Summanden Normalwerte darstellen. Dies wird angezeigt durch:

$$\underset{o.o}{\underset{o}{\bar{V}}} \wedge \underset{o.2}{\underset{o}{\bar{V}}} \wedge \underset{o.o}{\underset{1}{\bar{V}}} \wedge \underset{1.2}{\underset{1}{\bar{V}}}$$ (beide reell, keiner ein Ausnahmewert)

Aus den Werten $\underset{o}{V}$ und $\underset{1}{V}$, welche die „Speicherform" (konzentrierte Form) darstellen, werden zunächst die Werte z_o und z_1 gebildet („Rechenform"). Die Zuordnung der einzelnen Komponenten ergibt sich aus folgendem Schema:



Für die Rechenform führen wir den Angabentyp A△2 ein:

$$A\triangle 2 = (So, \underset{S1.8}{A10.2.0}, \underset{S1.29}{A10.2.0})$$

Hierbei ist von K1 nur das Vorzeichen übernommen, und bei den Werten a und b sind Stellenergänzungen vorgenommen. Dazu muß bei b die Eins ergänzt werden.

Der Wert der durch A△2 dargestellten Größen ergibt sich aus folgendem Ansatz:

```
  | z →Pos(z)
V | o       o
K | o

  | |z|    = 2└ z     × z     × 2^-26
V | o         o       o
K |           1       2
A | △2        1.8     1.29
```

Dies entspricht der Formel $y = 2^{a} \cdot b$.

Die Umbildung von V_o in Rz_o erfolgt nach Unterplan Pzo .

```
Pzo :   Rz(Vz  ) ⇒ Rzo
           o        o
          A△1      A△2
```

```
  | Vz   ⇒ Rz | (Vz  , Vz ) ⇒ Rz | (----„ Vz  „+--) ⇒ Rz
V | o       o |  o     o      o  |        o             o
K | o.1     o |  1     1.6    1  |        2             2
S | o       o |  1.7   o      1.8|        1.22          1.29
```

Die Umbildung von A△2 in A△1 erfolgt nach dem Unterplan Pz1 .

```
Pz1 :   Rz(Vz  ) ⇒ Rz1
           o        o
          A△2      A△1
```

```
  | - ⇒ Rz  | Vz ⇒ Rz  | - ⇒ Rz
V |     o   | o     o  |     o
K |     o.o | o     o.1|     o.2
S |     o   | o     o  |     o
```

```
  | (W1(6)) [ Vz   ⇒ Rz  ] | (W2(4,25)) [ Vz   ⇒ Rz    ]
V |         [ o      o   ] |            [ o      o     ]
K |         [ 1.i    1.i ] |            [ 2.i    2.i-4 ]
S |         [ o      o   ] |            [ o      o     ]
```

Wir haben nun die beiden Summanden z_o und z_1 , die wir in der Form

$$z_o = 2^{a_o} \cdot b_o \qquad z_1 = 2^{a_1} \cdot b_1$$

schreiben können.

Es gilt: $R_o = z_o + z_1 = 2^{a_o} \cdot b_o \times 2^{a_1} \cdot b_1$.

Diese Addition kann ohne weiteres nur ausgeführt werden, wenn die a-Werte gleich sind.

Allgemein gilt jedoch:

$$a_0 \geqslant a_1 \rightarrow \left(R = 2^{a_0} \cdot b_0 + 2^{a_0} \cdot b_1 \cdot 2^{-(a_0 - a_1)}\right)$$

$$a_0 < a_1 \rightarrow \left(R = 2^{a_1} \cdot b_1 + 2^{a_1} \cdot b_0 \cdot 2^{a_0 - a_1}\right)$$

bzw.

$$a_0 \geqslant a_1 \rightarrow \left[R = 2^{a_0} \times \left(b_0 + b_1 \circ 2^{-(a_0 - a_1)}\right)\right]$$

$$a_0 < a_1 \rightarrow \left[R = 2^{a_1} \times \left(b_1 + b_0 \circ 2^{a_0 - a_1}\right)\right]$$

Der entsprechende Rechenplan lautet wie folgt:

$$\begin{array}{c|lllll}
 & Z & - & Z & \Rightarrow & Z \\
V & 0 & & 1 & & 2 \\
K & 1 & & 1 & & \\
A & 10.2.0 & & 10.2.0 & & 10.2.0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|llll}
 & Z & \geqslant & 0 & \rightarrow \\
V & 2 & & & \\
K & & & & \\
S & & & &
\end{array}
\left[\begin{array}{lcl|lcl|lcl}
Z & \Rightarrow & Z & Z & \Rightarrow & Z & Z & \Rightarrow & Z \\
0 & & 3 & 0 & & 4 & 1 & & 5 \\
1 & & & 2 & & & 2 & & \\
 & & & & & & & &
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c|llll}
 & Z & < & 0 & \rightarrow \\
V & 2 & & & \\
K & & & & \\
S & & & &
\end{array}
\left[\begin{array}{lcl|lcl|lcl}
Z & \Rightarrow & Z & Z & \Rightarrow & Z & Z & \Rightarrow & Z \\
1 & & 3 & 1 & & 4 & 0 & & 5 \\
1 & & & 2 & & & 2 & & \\
 & & & & & & & &
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c|llllllll|lllll}
 & R10.72 & (& Z & , & -\,|Z|\,) & \Rightarrow & Z & & Z & + & Z & \Rightarrow & Z \\
V & & & 5 & & 2 & & 6 & & 4 & & 6 & & 7 \\
K & & & & & & & & & & & & & \\
S & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Aus den Werten Z_3 und Z_7 kann nun das Resultat gebildet werden. Z_3 entspricht dem a-Wert, Z_7 dem b-Wert. Es muß jedoch zunächst untersucht werden, ob der b-Wert der Bedingung

$$L \leqslant b < Lo$$

genügt. Es kann nämlich der Fall eintreten, daß b größer *oder gleich* Lo ist (jedoch muß es in jedem Fall kleiner als Loo sein).

Da nach Definition von $A\Delta 2$ gilt:

$$b = K2 \times 2^{-26} \quad ,$$

so muß im Falle $b \geqslant Lo$ gelten:

$$L_o \leqslant K2 \times 2^{-26}$$

bzw.

$$K2 \circ 2^{-27} \geqslant 1 \quad .$$

Es gilt daher: $K2.27 \rightarrow K2 \geqslant 1$.

(Wenn die Stelle 27 der Komp.2 von $A\Delta 2$ positiv ist, so ist der b-Wert größer oder gleich L_o.)

In diesem Falle muß eine Umformung stattfinden:

$$2^a \cdot b = 2^{a-1} \times b/2 \quad .$$

Zur Ermittlung des Resultats aus z_3 und z_7 gilt also:

	$\bar{z}$	$\rightarrow$ (+ ,	z,	z	) $\Rightarrow$	z
V	7		3	7		8
K	27					
A	o	o	1.8	1.29		$\Delta 2$

	z	$\rightarrow$ (+ ,	z+1 ,	$z \times \frac{1}{2}$	) $\Rightarrow$	z
V	7		3	7		8
K	27					
A	o	o	1.8	1.29		$\Delta 2$

Aus z_8 kann nun entsprechend Pz1 R_o gebildet werden.

Bisher wurde das Vorzeichen nicht berücksichtigt.

Sind die Vorzeichen gleich, so erfolgt Addition, sind sie ungleich, so erfolgt Subtraktion.

Das Gesetz für die Subtraktion ist ähnlich aufgebaut, wie das für die Addition (vgl. S.50 Mitte).

Anstelle von $z_4 + z_6$ tritt $z_4 - z_6$.

Jedoch ist die Bildung von z_8 aus z_3 und z_7 etwas komplizierter.

Zunächst muß untersucht werden, ob der neue b-Wert (z_7) positiv oder negativ ist. Da z_7 in Supplementform dargestellt ist, ergibt sich das aus der obersten Stelle:

	z	$\rightarrow \overline{\text{Pos}}$	(z)
V	7		7
K	28		

In diesem Falle muß aus z_7 zunächst das Supplement gebildet werden.

$$\begin{array}{c|llllll} & Z & \to & \big[\,R10.22(& Z) & \Rightarrow & Z\,\big] \\ V & 7 & & 0 & 7 & & 7 \\ K & 28 & & & & & \end{array}$$

Auch dieser Wert muß daraufhin untersucht werden, ob der zugehörige b-Wert $(Z_7 \cdot 2^{-26})$ die Bedingung

$$L \leqslant b < Lo$$

erfüllt. Im Gegensatz zur Addition kann jetzt der Wert kleiner als L sein. Es muß der Index der höchsten von Null verschiedenen Ziffer ermittelt werden:

$$\begin{array}{c|lllll} & I\,\big[\lambda x(x \in & & Z & \wedge\, x)\big] & \Rightarrow Z \\ V & & & 7 & & 9 \\ K & 9 & 0 & 10.2.0 & & 9 \end{array}$$

[Der Index [I] der höchsten Komponente von Z_7 $\big[\lambda x(x \in Z_7)\big]$, welche positiv ist (x), ergibt Z_9].

Dieser Wert muß durch Subtraktion von 26 korrigiert werden.

$$Z_9 - 26 \Rightarrow Z_9 \; .$$

Die neuen Werte Z_3 und Z_7 ergeben sich wie folgt aus den alten:

$$Z_3 + Z_9 \Rightarrow Z_9 \;\Big|\; R10.72(Z_7\,,\,-Z_9) \Rightarrow Z_7$$

Das Vorzeichen des Resultats ergibt sich wie folgt:

Ist $a_0 \geqslant a_1$ (vgl. S.50), so ist das Vorzeichen des Resultats gleich dem Vorzeichen von Z_0 falls die Differenz der b-Werte positiv ist, und entgegengesetzt dem Vorzeichen von Z_0 falls die Differenz negativ ist.

Im Falle $a_0 < a_1$ gilt das gleiche in Bezug auf Z_1 .

$$\begin{array}{c|llll|llll} & Z \geqslant 0 & \to & \big[\,Z \Rightarrow & Z\,\big] & Z < 0 & \to & \big[\,Z \Rightarrow & Z\,\big] \\ V & 2 & & 0 & 10 & 2 & & 1 & 10 \\ K & & & 0 & & & & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|llll} & Z & \sim \bar{Z} & & \Rightarrow Z \\ V & 10 & 7 & & 11 \\ K & & 28 & & \end{array}$$

Hieraus ergibt sich das Resultat Z_8 wie folgt:

$$(Z_{11}\,,\,Z_3\,,\,Z_7) \Rightarrow Z_8 \; .$$

Der Gesamtansatz für den Normalfall kann jetzt wie folgt angesetzt werden:

```
     V    ∧V    ∧V    ∧V     →
     0     0     1     1
     0.0   0.2   0.0   0.2

   ┌ Rzo(V ) ⇒ z      │ Rzo(V ) ⇒ z                                      ┐
 V │ 0   0      0     │ 0   1      1                                     │
 A │     Δ1     Δ2    │     Δ1     Δ2                                    │
   │                                                                     │
   │ z - z ⇒ z                                                           │
 V │ 0   1   2                                                           │
 K │ 1   1                                                               │
   │                                                                     │
   │ z > 0 → ┌z ⇒ z  │ z ⇒ z │ z ⇒ z │ z ⇒ z ┐                           │
 V │ 2       │0   10 │ 0   3 │ 0   4 │ 1   5 │                           │
 K │         └0      │ 1     │ 2     │ 2     ┘                           │
   │                                                                     │
   │ z < 0 → ┌z ⇒ z  │ z ⇒ z │ z ⇒ z │ z ⇒ z ┐                           │
 V │ 2       │1   10 │ 1   3 │ 1   4 │ 0   5 │                           │
 K │         └0      │ 1     │ 2     │ 2     ┘                           │
   │                                                                     │
   │ R10.72(z , -|z| ) ⇒ z                                               │
   │         5     2     6                                               │
   │                                                                     │
   │ z ~ z → ┌z + z ⇒ z┐ │ z ≁ z → ┌z - z ⇒ z┐                            │
 V │ 0   1   │4   6   7│ │ 0   1   │4   6   7│                            │
 K │ 0   0   └         ┘ │ 0   0   └         ┘                            │
   │                                                                     │
   │ z  → ┌R10.22(z) ⇒ z┐ │ I [λx(x ∈ z ∧ x)] - 26 ⇒ z                    │
 V │ 7    │         7   7│ │           7                 9               │
 K │ 28   └              ┘ │                                              │
   │                                                                     │
   │ z + z ⇒ z │ R10.72(z, -z) ⇒ z                                       │
   │ 3   9   3 │        7   9    7                                       │
   │                                                                     │
   │ (z ~ z̄ , z , z) ⇒ z                                                 │
 V │ 10   7   3   7    8                                                 │
 K │      28                                                             │
   │                                                                     │
   │ Rz1(z) ⇒ R                                                          │
   │ 0   8    0                                                          │
   └                                                                     ┘
```

Wir kommen nun zu den Fällen, in denen Ausnahmewerte auftreten.
Zunächst kann das Ergebnis der Operation mit zwei Normalwerten einen Ausnahmewert ergeben. Und zwar:

a) Der Wert $\begin{array}{c} z \\ 8 \\ 1 \end{array}$ (a=Wert von z_8) ist nicht mehr durch Stellen darstellbar. Das Kriterium hierfür lautet:

$$\begin{array}{c} z \\ 8 \\ 1.6 \end{array} \sim \begin{array}{c} z \\ 8 \\ 1.7 \end{array}$$

Und zwar ist der Wert zu groß im Falle $\begin{array}{c} \bar{z} \\ 8 \\ 1.7 \end{array} \wedge \begin{array}{c} z \\ 8 \\ 1.6 \end{array}$

und zu klein im Falle $\begin{array}{c} z \\ 8 \\ 1.7 \end{array} \wedge \begin{array}{c} \bar{z} \\ 8 \\ 1.6 \end{array}$

Als Resultat ergibt sich dann entweder „sehr groß" oder „sehr klein".

Im Falle „sehr groß" muß noch über das Vorzeichen eine Aussage gemacht werden. Es ist gleich dem Vorzeichen von z_8.

Es gilt also:

$$\begin{array}{c|ccc} & \bar{z} & \wedge & z \\ V & 8 & & 8 \\ K & 1.7 & & 1.6 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} z & \Rightarrow & R & - & \Rightarrow & R & + & \Rightarrow & R & + & \Rightarrow & R \\ 8 & & o & & & o & & & o & & & o \\ o & & o.1 & & & o.o & & & o.2 & & & 1.4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c|ccc} & z & \wedge & \bar{z} \\ V & 8 & & 8 \\ K & 1.7 & & 1.6 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} - & \Rightarrow & R & + & \Rightarrow & R & + & \Rightarrow & R & + & \Rightarrow & R \\ & & o & & & o & & & o & & & o \\ & & o.o & & & o.2 & & & 1.3 & & & 1.5 \end{array}\right]$$

b) Bei Subtraktion kann der Wert z_7 (Differenz der b-Werte) gleich Null sein.
Der Ausdruck $I\left[\lambda x\left(x \in \begin{array}{c} z \\ 7 \end{array} \wedge x\right)\right]$ kann dann nicht gebildet werden, da keine Stelle von z_7 positiv ist. Das Resultat ist dann „sehr klein".

$$\begin{array}{c} \bar{V}(z) \\ 7 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} - & \Rightarrow & R & + & \Rightarrow & R & + & \Rightarrow & R & + & \Rightarrow & R \\ & & o & & & o & & & o & & & o \\ & & o & & & o.2 & & & 1.3 & & & 1.5 \end{array}\right]$$

Die Ergänzung des Ansatzes von S.53 kann dann wie folgt erfolgen:

Bis zum Ausdruck $\begin{array}{c} z \\ 7 \\ 28 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} R10.22(z) & \Rightarrow & z \\ 7 & & 7 \\ & & \end{array}\right]$

bleibt er erhalten. Das folgende wird durch folgenden Ausdruck ersetzt:

```
V̄z →[ I[λx(x ∈ z ∧ x)] - 26 ⇒ z                                          ]
 7                 7             9
     z + z ⇒ z | R10.72(z , - z) ⇒ z
     3   9   3 |        7     9     7
     (z ~z̄ , z , z) ⇒ z
      10  7   3   7     8
          28
     z  ≁ z  →[Rz1(z) ⇒ R ]
     8    7   [o    8    o ]
     1.6  1.6 [            ]
     z  ~ z  →[- ⇒ R   | z ⇒ R   | + ⇒ R  ]
     8    7   [    o   | 8   o   |     o  ]
     1.6  1.6 [    o.o | o   o.1 |     o.2]
              [z   →[+ ⇒ R  ]             ]
              [8    [    o  ]             ]
              [1.6  [    1.4]             ]
              [z   →[+ ⇒ R  | + ⇒ R  ]    ]
              [8    [    o  |     o  ]    ]
              [1.7  [    1.3|     1.5]    ]
V̄(z)→[ - ⇒ R   | + ⇒ R   | + ⇒ R   | + ⇒ R   ]
  7  [     o   |     o   |     o   |     o   ]
     [     o.o |     o.2 |     1.3 |     1.5 ]
```

Wir kommen nun zu den eigentlichen Sonderfällen.

Die verschiedenen Möglichkeiten seien zunächst in einer Tabelle zusammengestellt (mit den Kurzzeichen von S.45).

	V_0	V_1	R_0
bzw.	V_1	V_0	
a)	$0, \gg$	$\neq 0$	V_1 bzw. V_0
b)	0	0	0
c)	$+\infty$ $+\infty$ $-\infty$ $-\infty$	$+$ $\lvert< 2^n\rvert$ $-$ $\lvert< 2^n\rvert$	$+\infty$ $+\infty$ $-\infty$ $-\infty$
d)	$\lvert\infty\rvert$	$\lvert< 2^n\rvert$	$\lvert\infty\rvert$
e)	$+\infty$ $\lvert\infty\rvert$	$-\infty$ $\left\{\begin{array}{l}\lvert\infty\rvert\\+\infty\\-\infty\end{array}\right.$	?
f)	1 ?		?

Im Einzelnen haben die Fälle folgende Bedeutung:

a) Ist einer der beiden Summanden gleich Null oder sehr ~~klei~~ klein, und ist der andere nicht gleich Null, so ist das Resultat gleich dem letzteren.

b) Sind beide Werte gleich Null, so ist das Resultat gleich Null.

c) Ist einer der Werte sehr groß mit bestimmtem Vorzeichen und hat der andere das gleiche Vorzeichen, oder ist er absolut genommen verhältnismäßig klein gegenüber 2^{65} $[< 2^n]$, so ist das Resultat gleich dem ersten Wert. Hierbei ist 2^n eine willkürlich festgelegte Zahl (bei V_4 $n = 8$).

d) Ist einer der beiden Werte sehr groß mit unbekanntem Vorzeichen und der andere absolut genommen kleiner als 2^n, so ist das Resultat sehr groß mit unbestimmtem Vorzeichen.

e) Sind beide Werte sehr groß mit entgegengesetzten oder unbekannten Vorzeichen, so ist das Resultat unbestimmt.

f) Ist einer der beiden Werte imaginär oder unbestimmt, so ist das Resultat unbestimmt.

(Im Falle, daß beide Werte imaginär sind, ließe sich zwar das Resultat bestimmen. Doch soll entsprechend dem Aufbau der V_4 nicht mit imaginären Werten gerechnet werden.)

g) In Fällen, die in keinem der oben angeführten enthalten sind, ist das Resultat unbestimmt.

Diese Bedingungen werden durch folgende Formeln dargestellt.

Gemeinsame Bedingung für alle ist:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \vee & V & \vee & V & \vee & V \\ 0 & & 0 & & 1 & & 1 \\ 0.0 & & 0.2 & & 0.0 & & 0.2 \end{array}$$

Bedingung a)

$$\begin{array}{cccccccccccc} V & \wedge & V & \vee & V & \wedge & \overline{V} & \overline{\wedge} & \overline{V} & \rightarrow & V & \Rightarrow R \\ 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & 1 & 0 \\ 0.2 & & 1.2 & & 1.5 & & 0.2 & & 1.2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} V & \wedge & V & \vee & V & \wedge & \overline{V} & \overline{\wedge} & \overline{V} & \rightarrow & V & \Rightarrow R \\ 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & 0 \\ 0.2 & & 1.2 & & 1.5 & & 0.2 & & 1.2 & & & \end{array}$$

Bedingung b)

$$\begin{array}{ccccccccc} V & \wedge & V & \wedge & V & \wedge & V & \rightarrow & \left[\begin{array}{cc|cc} + \Rightarrow & R & + \Rightarrow & R \\ & 0 & & 0 \\ & 0.2 & & 1.2 \end{array}\right] \\ 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & \\ 0.2 & & 1.2 & & 0.2 & & 1.2 & & \end{array}$$

Bedingung c)

$$\begin{array}{llll} V & \sim V & \Rightarrow z & \\ 0 & 1 & 12 & \\ 0.1 & 0.1 & & \end{array} \qquad \text{(gleiche Vorzeichen)}$$

$$\begin{array}{lllllllllll} (V & \wedge V & \vee V &) \vee (\overline{V} & \wedge \overline{V} & \wedge \overline{V} & \wedge \overline{V} &) \Rightarrow z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0.2 & 1.2 & 1.5 & 1.6 & 1.5 & 1.4 & 1.3 & \end{array} \qquad \left|\begin{array}{l} V \\ 0 \end{array}\right| < 2^8$$

$$\begin{array}{lllllllllll} (V & \wedge V & \vee V &) \vee (\overline{V} & \wedge \overline{V} & \wedge \overline{V} & \wedge \overline{V} &) \Rightarrow z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0.2 & 1.2 & 1.5 & 1.6 & 1.5 & 1.4 & 1.3 & \end{array} \qquad \left|\begin{array}{l} V \\ 1 \end{array}\right| < 2^8$$

$$\begin{array}{llllllll} V & \wedge V & \wedge \overline{V} & \wedge z & \vee z & \dot{\rightarrow} & V & \Rightarrow R \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 14 & & 0 & 0 \\ 0.2 & 1.4 & 1.3 & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll} V & \wedge V & \wedge \overline{V} & \wedge z & \vee z & \dot{\rightarrow} & V & \Rightarrow R \\ 1 & 1 & 1 & 12 & 13 & & 1 & 0 \\ 0.2 & 1.4 & 1.3 & & & & & \end{array}$$

Bedingung d)

$$\begin{array}{lllllll|lllllll} V & \wedge V & \wedge V & \wedge z & \dot{\rightarrow} & V & \Rightarrow R & V & \wedge V & \wedge V & \wedge z & \dot{\rightarrow} & V & \Rightarrow R \\ 0 & 0 & 0 & 14 & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 13 & & 1 & 0 \\ 0.2 & 1.4 & 1.3 & & & & & 0.2 & 1.4 & 1.3 & & & & \end{array}$$

Bedingung e)

$$\begin{array}{llllllll} V & \wedge V & \wedge V & \wedge V & \wedge \overline{z} & \vee V & \vee V & \dot{\rightarrow} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 12 & 0 & 1 & \\ 0.2 & 1.4 & 0.2 & 1.4 & & 1.3 & 1.3 & \end{array} \left[\begin{array}{ll|ll} + & \Rightarrow R & + & \Rightarrow R \\ & 0 & & 0 \\ & 0.2 & & 1.1 \end{array}\right]$$

Bedingung f)

$$\begin{array}{lllllll} V & \wedge V & \vee V & \wedge V & \vee V & \vee V & \dot{\rightarrow} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 0.2 & 1.1 & 0.2 & 1.1 & 0.0 & 0.0 & \end{array} \left[\begin{array}{ll|ll} + & \Rightarrow R & + & \Rightarrow R \\ & 0 & & 0 \\ & 0.2 & & 1.1 \end{array}\right]$$

Bedingung g)

Diese kann nur mit Hilfe von Zwischenwerten z_{20} bis z_{23} ausgedrückt werden:

z_{20} entspricht: $V_0 \Rightarrow \underset{0}{R}$

z_{21} entspricht: $V_1 \Rightarrow \underset{0}{R}$

z_{22} entspricht: $0 \Rightarrow \underset{0}{R}$

z_{23} entspricht: $? \Rightarrow \underset{0}{R}$

Als Ansatz für die Sonderfälle ergibt sich dabei:

$$\begin{array}{lllll} V & \vee V & \vee V & \vee V & \rightarrow \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll|lllll|lllll} V & \sim V & \Rightarrow & Z & V & \wedge V & \vee V & \Rightarrow & Z & V & \wedge V & \vee V & \Rightarrow & Z \\ 0 & 1 & & 12 & 0 & 0 & 0 & & 15 & 1 & 1 & 1 & & 16 \\ 0.1 & 0.1 & & & 0.2 & 1.2 & 1.5 & & & 0.2 & 1.2 & 1.5 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll|llllllll} Z & \vee (\overline{V} & \wedge \overline{V} & \wedge \overline{V} & \wedge \overline{V} &) & \Rightarrow & Z & Z & \vee (\overline{V} & \wedge \overline{V} & \wedge \overline{V} & \wedge \overline{V} &) & \Rightarrow & Z \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 13 & 16 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 14 \\ & 1.6 & 1.5 & 1.4 & 1.3 & & & & & 1.6 & 1.5 & 1.4 & 1.3 & & & \end{array}$$

a) $$\begin{array}{llll|llll} Z & \wedge \overline{V \quad \wedge V} & \Rightarrow & Vz & Z & \wedge \overline{V \quad \wedge V} & \Rightarrow & Vz \\ 15 & 1 \qquad\quad 1 & & 21 & 16 & 0 \qquad\quad 0 & & 20 \\ & 0.2 \qquad 0.2 & & & & 0.2 \qquad 1.2 & & \end{array}$$

b) $$\begin{array}{llllll} V & \wedge V & \wedge V & \wedge V & \Rightarrow & Vz \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & 22 \\ 0.2 & 1.2 & 0.2 & 1.2 & & \end{array}$$

c) $$\begin{array}{lllllll|lllllll} V & \wedge V & \wedge \overline{V} & \wedge Z & \vee Z & \Rightarrow & Vz & V & \wedge V & \wedge \overline{V} & \wedge Z & \vee Z & \Rightarrow & Vz \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 14 & & 20 & 1 & 1 & 1 & 12 & 13 & & 21 \\ 0.2 & 1.4 & 1.3 & & & & & 0.2 & 1.4 & 1.3 & & & & \end{array}$$

d) $$\begin{array}{llllll|llllll} V & \wedge V & \wedge V & \wedge Z & \Rightarrow & Vz & V & \wedge V & \wedge V & \wedge Z & \Rightarrow & Vz \\ 0 & 0 & 0 & 14 & & 20 & 1 & 1 & 1 & 13 & & 21 \\ 0.2 & 1.4 & 1.3 & & & & 0.2 & 1.4 & 1.3 & & & \end{array}$$

e) $$\begin{array}{lllllllll} V & \wedge V & \wedge V & \wedge V & \wedge \overline{Z} & \vee V & \vee V & \Rightarrow & Vz \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 12 & 0 & 1 & & 23 \\ 0.2 & 1.4 & 0.2 & 1.4 & & 1.3 & 1.3 & & \end{array}$$

f) $$\begin{array}{llllllll} V & \wedge V & \vee V & \wedge V & \vee V & \vee V & \Rightarrow & Vz \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & & 23 \\ 0.2 & 1.1 & 0.2 & 1.1 & 0.0 & 0.0 & & \end{array}$$

g) $$\begin{array}{llllll} \overline{Z} & \wedge \overline{Z} & \wedge \overline{Z} & \wedge \overline{Z} & \Rightarrow & Vz \\ 20 & 21 & 22 & 23 & & 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll|llll} Z & \rightarrow (V & \Rightarrow & R) & Z & \rightarrow (V & \Rightarrow & R) \\ 20 & \quad\; 0 & & 0 & 21 & \quad\; 1 & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Z & \rightarrow \left[\begin{array}{lll|lll} + & \Rightarrow & R & + & \Rightarrow & R \\ & & 0 & & & 0 \\ & & 0.2 & & & 1.2 \end{array} \right] \\ 22 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Z & \rightarrow \left[\begin{array}{lll|lll} + & \Rightarrow & R & + & \Rightarrow & R \\ & & 0 & & & 0 \\ & & 0.2 & & & 1.1 \end{array} \right] \\ 23 & \end{array}$$

Der Gesamtplan $\begin{array}{l} P \triangle .64 \\ A \triangle 1 \end{array}$

besteht in der Vereinigung der Ansätze von S.53, 55 und 58.
Es können noch kleinere Vereinfachungen vorgenommen werden.

Kapitel 4

Inhaltsverzeichnis ~~von Kapitel 4~~

Operationen mit algebraischen Ausdrücken

(Insbes. Aussagenkalkül)

Kap. 4: Operationen mit algebraischen Ausdrücken
(Insbes. Aussagenkalkül).

I. Allgemeines.

1) Problemstellung:

Es soll das Arbeiten mit beliebigen algebraischen Ausdrücken z.B. arithmetischen oder Aussagen-logischen mechanisiert werden.
Es handelt sich dabei im Einzelnen um Aufgaben der folgenden Art:

a) Gegebene Ausdrücke daraufhin untersuchen, ob sie den Regeln entsprechend gebildet sind.

b) Vereinfachung von Ausdrücken.

c) Ermittlung von Eigenschaften von Ausdrücken.

d) Ordnung der Elemente von Ausdrücken.

e) Umformung von Ausdrücken.

f) Einsetzung von Ausdrücken an Stelle von Variablen.

g) Bildung von Rechenplänen.

h) Feststellung der Identität von Ausdrücken.

i) Entwicklung expliziter Ausdrücke aus impliziten.

j) Bildung der Ableitung bei arithmetischen Ausdrücken

k) Entwicklung der Integrale von arithmetischen Ausdrücken.

l) Überführung verschiedener Darstellungsformen ineinander.

Diese Liste ist beliebig ergänzbar bis zur vollen Mechanisierung ganzer algebraischer Lehrgebäude.

2) Darstellung von Ausdrücken:

Algebraische Ausdrücke werden am besten in der Form von Zeichenfolgen dargestellt. Die Darstellung kann sich dabei an die üblichen Formen anlehnen, oder es können spezielle Formen, die eine besonders leichte Bearbeitung zulassen, eingeführt werden. Die üblichen Darstellungsformen müssen etwas abgeändert werden, da sie keine reinen Zeichenfolgen darstellen (z.B. Negationsstrich im Hilbertschen Aussagenkalkül, Bruchstrich und Exponentendarstellung bei arithmetischen Ausdrücken).

Für die einzelnen Zeichen verwendet man am besten eine einheitliche Struktur σ; am besten $S1.n$. Ein Ausdruck hat dann die Form einer Liste $S3.m = m \times \sigma$. Hierbei können verschiedene Darstellungsformen definiert werden.

3) Darstellung der Rechenpläne und Funktionszeichen:

Das gesamte Gebiet ist sehr umfangreich und entsprechend wäre eine systematische Nummerierung aller Rechenpläne sehr unübersichtlich.

Innerhalb der verschiedenen Gebiete treten viele analoge Rechenpläne auf. Sinnvolle Ausdrücke, Vereinfachungen von Ausdrücken, Eigenschaften einzelner Zeichen u.s.w. Für solche Rechenpläne werden zunächst Buchstabenkombinationen eingeführt, die zur Kennzeichnung der verschiedenen Variationen und Gebiete gegebenenfalls mit Nummern oder Indices versehen sind. Z.B. Sa1 , Sa2 u.s.w. für sinnvolle Ausdrücke. Eine systematische Ordnung empfiehlt sich erst, nachdem über das gesamte Gebiet ein Überblick möglich ist.

II. Der Aussagenkalkül.

1) Festlegung der Darstellungsform:

Es wird eine Darstellungsform gewählt, die sich an den Hilbert'schen Formalismus anlehnt, jedoch mit folgenden Unterschieden:

a) An Stelle des Zeichens & tritt das Zeichen $\wedge$.

b) Operationszeichen werden nie fortgelassen.

c) Die Negation wird durch Vorsetzen eines Negationszeichens vor den zu negierenden Ausdruck dargestellt. Falls dieser nicht aus einer einzelnen (ev. negierten) Variablen besteht, muß er eingeklammert werden.

d) Es wird nur eine Art von Klammern verwandt.

Diese Darstellung hat die Form reiner Zeichenfolgen. Z.B.:

$$a \wedge b$$

$$-a \vee (b \wedge c)$$

$$(-(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee e) \sim g \; .$$

Wir haben folgende Zeichenarten:

a) Variablenzeichen

b) Negationszeichen

c) Operationszeichen

d) Klammerzeichen

e) Zwischenraumzeichen .

Die Variablenzeichen sind an Zahl grundsätzlich unbegrenzt. Eine praktische Grenze ist durch die Struktur σ der Zeichen gegeben.

Wir verwenden folgende Operationszeichen:

$\vee$ Disjunktion

$\wedge$ Konjunktion

$\rightarrow$ Implikation

$\nsim$ Disvalenz

$\sim$ Aequivalenz .

An Klammerzeichen haben wir das Klammerauf- und das Klammerzu-Zeichen.

Das Zwischenraumzeichen ist in der üblichen Schreibform kein Zeichen. Jedoch muß es bei der Definition der Zeichenstrukturen mit einbegriffen werden. Es dient der Trennung unabhängiger Ausdrücke.

Als Beispiel für die Darstellung der Zeichen wählen wir folgende Form:

$$\sigma = S1.8$$

01234567			
+ (Stelle 7)	Variable	V_i	Va(x)
0000----	Zwischenraum		Zr(x)
0000--+-	Negation	$-$	Neg(x)
0000+-+-	Klammerzeichen	(	Kla(x)
0000++--	Klammerzeichen	)	Klz(x)
+--0+---	Operationszeichen	$\wedge$	Op(x)
-+-0+---	Operationszeichen	$\vee$	Op(x)
++-0+---	Operationszeichen	$\rightarrow$	Op(x)
--+0+---	Operationszeichen	$\nsim$	Op(x)
+-+0+---	Operationszeichen	$\sim$	Op(x)

„o" bedeutet, daß die betreffende Stelle von σ bei der betreffenden Zeichenart indifferent ist.

Bei den Variablenzeichen dienen die Stellen 0 bis 6 von σ der Unterscheidung der Variablen (Index von V).

Für die einzelnen Zeichenarten werden Prädikatensymbole (siehe Aufstellung) eingeführt. Ihre exakte Definition ergibt sich ohne weiteres. Z.B.

	V	⇒ Va(V)	V	∧ $\overline{V}$	∧ $\overline{V}$	∧ $\overline{V}$	⇒ Op(V)
V	o	o	o	o	o	o	o
K	z		4	5	6	7	

2) Regeln zur Bildung von Zeichenfolgen und Prüfung von Ausdrücken, ob sie den Regeln entsprechen:

Wir setzen zunächst folgende Regeln an:

a) Eine einzelne Variable ist ein sinnvoller Ausdruck.

b) Durch Vorsetzen eines Negationszeichens vor einen sinnvollen Ausdruck entsteht wieder ein sinnvoller Ausdruck.

c) Durch Zwischensetzen eines Operationszeichens zwischen zwei sinnvolle Ausdrücke entsteht wieder ein sinnvoller Ausdruck.

d) Durch Einklammern eines sinnvollen Ausdrucks entsteht wieder ein sinnvoller Ausdruck.

Nach solchen Regeln gebildete Ausdrücke ergeben in jedem Falle aussagenlogische Ausdrücke. Jedoch entsprechen diese nicht immer den operativen Verknüpfungen des Bildungsprozesses.

So kann z.B. aus dem Ausdruck $a \vee b$ der Ausdruck $-a \vee b$ gebildet werden. Dieser entspricht aber nicht der Negation des Ausdrucks $a \vee b$, also in üblicher Schreibweise dem Ausdruck $\overline{a \vee b}$, sondern dem Ausdruck $\bar{a} \vee b$.

Ebenso kann aus den Ausdrücken $a_1 \wedge b_1$ und $a_2 \wedge b_2$ der Ausdruck

$$a_1 \wedge b_1 \vee a_2 \wedge b_2$$

gebildet werden.

Dieser Ausdruck entspricht nach der Regel, daß das $\vee$-Zeichen enger bindet als das $\wedge$-Zeichen jedoch nicht dem Ausdruck

$$(a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \quad ,$$

sondern dem Ausdruck

$$a_1 \wedge (b_1 \vee a_2) \wedge b_2 \quad .$$

Es hat dies jedoch in Bezug auf die Aussage „sinnvoller Ausdruck" nichts zu bedeuten. Die nach den Regeln gebildeten Ausdrücke sind auf jeden Fall sinnvoll und jeder sinnvolle Ausdruck kann unter Zuhilfenahme der Einklammerung nach den Regeln gebildet werden. Die nach den Regeln gebildeten Ausdrücke können überflüssige Einklammerungen enthalten. Jedoch entstehen hierdurch keine sinnlosen Ausdrücke. Auf die genaueren Regeln für das Setzen von Klammern kommen wir später zu sprechen.

Die exakte Formulierung dieser Regeln lautet wie folgt:

$Sa(x)$	bedeutet:	„x ist ein sinnvoller Ausdruck"
$Va'(x)$	bedeutet:	„Der Ausdruck x besteht aus einer einzigen Variablen".
$Lz(y_0, y_1)$	=	Längszusammensetzung der Zeichenfolgen y_0, y_1.

$$(x)\left[Sa(x) \sim \left[\begin{array}{l} Va'(x) \\ \vee \left[x = Lz(y_0, y_1) \wedge Neg(y_0) \wedge Sa(y_1) \right] \\ \vee \left[x = Lz(y_0, y_1, y_2) \wedge Sa(y_0) \wedge Op(y_1) \wedge Sa(y_2) \right] \\ \vee \left[x = Lz(y_0, y_1, y_2) \wedge Kla(y_0) \wedge Sa(y_1) \wedge Klz(y_2) \right] \end{array} \right] \right]$$

Um diesen in impliziter Form gegebenen Ausdruck für $Sa(x)$ explizit zu entwickeln, wird wie folgt vorgegangen:

Ausdrücke der Form $Sa(x)$ entstehen durch schrittweisen Aufbau aus einfachen Variablen nach den Regeln b, c, d (siehe S.4).

Jeder Aufbauschritt besteht in einfachen Aneinandersetzungen von Zeichen bzw. Zeichenfolgen. Hieraus ergeben sich Gesetze über die möglichen Lagen der Zeichenarten zueinander.

Es wird daher zunächst das Kriterium dafür aufgestellt, daß zwei Zeichen innerhalb eines sinnvollen Ausdruckes aufeinanderfolgen können.

So ergibt sich ohne weiteres aus den Aufbauregeln:

Ein Negationszeichen muß vor einem sinnvollen Ausdruck stehen.

Ein Operationszeichen muß zwischen zwei sinnvollen Ausdrücken stehen.

Ein Kla-Zeichen muß vor und ein Klz-Zeichen muß hinter einem sinnvollen Ausdruck stehen.

Um die entsprechenden Regeln für zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Zeichen zu entwickeln, brauchen wir die Kriterien dafür, daß ein Zeichen am Anfang bzw. am Ende eines sinnvollen Ausdruckes stehen kann.

Wir bzeichnen die beiden Prädikate mit Az(x) und Sz(x).

Az(x) „das Zeichen x kann am <u>A</u>nfang eines sinnvollen Ausdrucks stehen"

Sz(x) „das Zeichen x kann am Ende (<u>S</u>chluß) eines sinnvollen Ausdrucks stehen<u>"</u>.

Die exakten Ansätze lauten:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & (Ex) & \big(Sa(x) \wedge & x & = & V\big) & \Rightarrow & Az & (V) \\
V & & & & & 0 & & & 0 \\
K & & & 0 & & & & & \\
S & \square\times\sigma & & \sigma & & \sigma & & 0 & \sigma
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & (Ex) & \big(Sa(x) \wedge & x & = & V\big) & \Rightarrow & Sz & (V) \\
V & & & & & 0 & & & 0 \\
K & & & m-1 & & & & & \\
S & m\times\sigma & & \sigma & & \sigma & & 0 & \sigma
\end{array}$$

(Es gibt sinnvolle Ausdrücke, deren erstes bzw. letztes Glied gleich $\underset{0}{V}$ ist.)

Aus dem Ansatz von S.5 ergibt sich folgende rekursive Definition von Az:

$$Va(x) \vee Neg(x) \vee Kla(x) \vee Az(x) \sim Az(x)$$

Durch rekursives Schließen, welches im Einzelnen hier nicht ausgeführt wird, ergibt sich, daß gilt:

$$Va(x) \vee Neg(x) \vee Kla(x) \sim Az(x) \quad .$$

Entsprechend kann Sz entwickelt werden:

$$\mathrm{Va}(x) \vee \mathrm{Klz}(x) \sim \mathrm{Sz}(x) \quad .$$

Wir bilden nun das Prädikat 'Az(x).

„Das Zeichen x kann innerhalb eines sinnvollen Ausdrucks vor einem Zeichen der Eigenschaft Az stehen."

Es ergibt sich aus den Bildungsvorschriften, daß gilt:

$$\mathrm{Neg}(x) \vee \mathrm{Kla}(x) \vee \mathrm{Op}(x) \sim {}'\mathrm{Az}(x) \quad .$$

Entsprechend bilden wir Sz'(x). „Das Zeichen x kann innerhalb eines sinnvollen Ausdrucks auf ein Zeichen der Eigenschaft Sz folgen."

$$\mathrm{Klz}(x) \vee \mathrm{Op}(x) \sim \mathrm{Sz}'(x) \quad .$$

Setzen wir voraus, daß jedes Zeichen genau eine der Eigenschaften

$$\mathrm{Va}(x)\ ,\ \mathrm{Zr}(x)\ ,\ \mathrm{Neg}(x)\ ,\ \mathrm{Kla}(x)\ ,\ \mathrm{Klz}(x)\ ,\ \mathrm{Op}(x)$$

haben muß, so gilt:

$$\overline{\mathrm{Zr}(x)} \rightarrow \Big({}'\mathrm{Az}(x) \sim \overline{\mathrm{Sz}}(x)\Big) \wedge \Big(\mathrm{Sz}'(x) \sim \overline{\mathrm{Az}(x)}\Big) \quad .$$

Wir bilden nun die Hilfsoperation

$$\begin{array}{c|llll} & \mathrm{Sq0}(V, & V, & V &) \\ V & \quad 0 & 1 & 2 & \\ S & \quad \sigma & \sigma & \square\times\sigma & \end{array}$$

„Innerhalb der Liste V_2 folgt das Glied V_1 unmittelbar auf das Glied V_0."

$$(\mathrm{Ex}) \left[\begin{array}{llllll} V & = & V & \wedge & V & = V \\ 2 & & 0 & & 2 & \quad\; 1 \\ x & & & & x+1 & \end{array}\right] \Rightarrow \mathrm{Sq0}(V_0,\ V_1,\ V_2)$$

Jetzt können wir Sq1 implizit definieren: „Es sind sinnvolle Zeichenfolgen möglich, bei denen das Zeichen V_1 unmittelbar auf V_0 folgt."

$$(\mathrm{Ex})\Big(\mathrm{Sa}(x) \wedge \mathrm{Sq0}(V_0,\ V_1,\ x)\Big) \Rightarrow \mathrm{Sq1}(V_0,\ V_1)$$

Wir können zunächst ansetzen:

$$\Big({}'\mathrm{Az}(V_0) \wedge \mathrm{Az}(V_1)\Big) \vee \Big(\mathrm{Sz}(V_0) \wedge \mathrm{Sz}'(V_1)\Big) \rightarrow \mathrm{Sq1}(V_0,\ V_1)$$

Hierfür wurde die Ableitung bereits erbracht. Es muß nur noch untersucht werden, ob noch weitere Fälle aufeinanderfolgender Zeichen möglich sind, welche durch obigen Ansatz nicht gekennzeichnet sind.

Durch rekursives Schließen ergibt sich wieder, daß obiger Ansatz alle Fälle erschöpft. Er gibt alle Fälle wieder, in denen durch Längszusammensetzung Zeichen an den Grenzstellen zu aufeinanderfolgenden Zeichen werden. Als Elemente dieser Zusammensetzungen treten einzelne Zeichen und Zeichenfolgen der Eigenschaft Sa(x) auf. Da diese durch Aufbau aus einfachen Zeichen aufgebaut werden können, ohne daß dabei neue Nachbarkombinationen auftreten können, so ist obiger Ansatz erschöpfend und wir können schreiben:

$$\left('Az(\underset{0}{V}) \wedge Az(\underset{1}{V})\right) \vee \left(Sz(\underset{0}{V}) \wedge Sz'(\underset{1}{V})\right) \Rightarrow Sq1(\underset{0}{V}, \underset{1}{V})$$

Unter Zuhilfenahme des Satzes S.7 Mitte können wir hierfür schreiben:

$$\overline{Zr(\underset{0}{V})} \wedge \overline{Zr(\underset{1}{V})} \wedge \left(Sz(\underset{0}{V}) \nrightarrow Az(\underset{1}{V})\right) \Rightarrow Sq1(\underset{0}{V}, \underset{1}{V})$$

Es gilt dies nur für einzelne Ausdrücke, also solche Zeichenfolgen, die kein Zwischenraumzeichen enthalten.

Wir haben nun eine notwendige Bedingung für $Sa(\underset{0}{V})$ gefunden:

$$Sa(\underset{0}{V}) \rightarrow \left[(x)(y)\left(Sq0(x, y, \underset{0}{V}) \rightarrow Sq1(x, y)\right)\right]$$

Diese Bedingung genügt jedoch noch nicht, denn es genügen ihr z.B. folgende Zeichenfolgen:

$$\vee a$$

$$(a \wedge b \wedge$$

Zunächst ist ohne weiteres klar, daß das erste Zeichen ein Zeichen der Eigenschaft Az und das letzte ein Zeichen der Eigenschaft Sz sein muß:

$$\begin{array}{c|l} & Sa(V \quad) \rightarrow \left[Sa(V) \wedge Sz(V \quad) \right] \\ V & \quad\; 0 \qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad\;\; 0 \\ K & \qquad\qquad\qquad\;\;\; 0 \qquad\quad m-1 \\ S & \quad m \times \sigma \qquad\qquad \sigma \qquad\quad\;\; \sigma \end{array}$$

Auch die so gewonnenen beiden Ansätze sind noch nicht erschöpfend. Z.B. genügen ihnen folgende Zeichenfolgen, welche nicht den Aufbauregeln entsprechen:

$$(a \wedge b \quad , \quad a \wedge (b \vee c))$$

Diese Ausdrücke enthalten zu viel bzw. zu wenig Klammern.

Aus der Regel für die Klammerzeichen ergibt sich zunächst, daß in einem sinnvollen Ausdruck die Zahl der Kla-Zeichen gleich der Zahl der Klz-Zeichen sein muß:

Dipl.-Ing. K. Zuse
Ingenieurbüro
und Apparatebau
Berlin

$$Sa(V_0) \rightarrow \left[N\left(\hat{\hat{x}}\left(x \in V_0 \wedge Kla(x)\right)\right) = N\left(\hat{\hat{x}}\left(x \in V_0 \wedge Klz(x)\right)\right)\right]$$

Jedoch genügen auch die so gewonnenen drei Ansätze noch nicht; denn es genügt ihnen z.B. folgende Zeichenfolge:

a) ∨ (b .

Wir brauchen noch folgende Bedingung: Verstehen wir unter einer „Aufbauliste von V" eine solche, aus der lediglich durch Ansetzen weiterer° Zeichen die Liste V_0 gebildet werden kann, so gilt: „Für jede Aufbauliste ° muß die Zahl der Kla-Zeichen größer oder gleich der Zahl der Klz-Zeichen sein".

Dieser Bedingung genügt zum Beispiel nicht die zum Ausdruck a) ∨ (b gehörige Aufbauliste a) .

$$\begin{array}{l|llllll}
 & (Ex)(Lz(V & , x &) = V &) \Rightarrow Al(V & V) \\
V & & 0 & & 1 & 0 & 1 \\
S & \square\times\sigma & \square\times\sigma & \square\times\sigma & \square\times\sigma & 0 &
\end{array}$$

$Al(V_0, V_1) =$ „V_0 ist eine Aufbauliste von V_1 "

Die Bedingung lautet dann:

$$\begin{array}{l|l}
 & Sa(V) \rightarrow (x)\left[Al(x, V) \rightarrow N\left(\hat{\hat{y}}\left(y \in x \wedge Kla(y)\right)\right) \geq N\left(\hat{\hat{y}}\left(y \in x \wedge Klz(y)\right)\right)\right] \\
V & \quad 0 \qquad\qquad\qquad\quad 0 \\
S & \square\times\sigma \quad \square\times\sigma \quad 0 \quad \square\times\sigma \quad \square\times\sigma \quad \sigma\ \sigma \quad \square\times\sigma \quad \sigma \quad \sigma\ \sigma \quad \square\times\sigma \quad \sigma
\end{array}$$

Nunmehr wollen wir den Gesamtausdruck für $Sa(V_0)$ ansetzen:

$$\begin{array}{l|l}
V & \Big[(x)(y)\left(Sq0(x, y, V_0) \rightarrow Sq1(x, y)\right) \wedge Sa(V_{0,0}) \wedge Sz(V_{0,m-1}) \\
K & \wedge \left[N\left(\hat{\hat{x}}\left(x \in V_0 \wedge Kla(x)\right)\right) = N\left(\hat{\hat{x}}\left(x \in V_0 \wedge Klz(x)\right)\right)\right] \\
 & \wedge (x)\left[Al(x, V_0) \rightarrow N\left(\hat{\hat{y}}\left(y \in x \wedge Kla(y)\right)\right) \geq N\left(\hat{\hat{y}}\left(y \in x \wedge Klz(y)\right)\right)\right]\Big]
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 & \Rightarrow Sa(V) \\
V & \qquad\ 0 \\
S & \qquad m\times\sigma
\end{array}$$

Dieser Ansatz wurde hypothetisch gewonnen. Sein Beweis muß durch rekursives Schließen erfolgen.

Da die Bildung eines zusammengesetzten Ausdrucks schrittweise durch Vereinigen von Zeichen und Unterausdrücken erfolgt, so muß der Satz gelten:

„Gilt Sa(x) für die zur Bildung benutzten Teilausdrücke, so gilt er auch für den zusammengesetzten Ausdruck."

Ist dieser Satz bewiesen, so ist auch Sa(x) bewiesen, da die Elementarausdrücke (Variablen) die Bedingung Sa(x) erfüllen.

Dieser exakte Beweis wird hier übergangen.

Der so gewonnene explizite Ausdruck für Sa(V) läßt sich nun noch im Hinblick auf leichte Berechenbar- o keit umformen:

[Wir führen zunächst das Prädikat 'Sa(x) ein, welches besagt, daß der Ausdruck x durch geeignete Zeichen zu einem sinnvollen Ausdruck ergänzbar ist.

$$(Ex)\left(Sa(x) \wedge Al(V_0, x)\right) \Rightarrow {}'Sa(V_0)$$

Wir können dann laufend durch Herausziehen neuer Zeichen von V_0 untersuchen, ob V_0 die Eigenschaft $Sa(V_0)$ hat.]

Jeder Aufbauliste von V_0 ordnen wir noch einen Wert ε zu, welcher gleich der Differenz der Kla- und Klz-Zeichen ist.

```
  | R(V   ) ⇒ R | R = SaC(V)
V |   0       0 | 0       0
S |   □×σ     0 |
```

```
     (1)            (2)      (3)
  |  Az(V) ⇒ ∧R   | ⊖ ⇒ Z  | 0 ⇒ ε   |
V |     0     0   |     0  |         |
K |     0         |        |         |
S | 0   σ     0   | σ   σ  |    1.n  |
```

```
          (4)                    (5)
V | W [ μx(x ε V   ) ⇒ z | Sq1(z, z) ⇒ ∧R    ]
K |            0      1  |     0  1     0
S |      σ     □×σ    σ  |
       (6)                       (7)
V |    Kla(z) → (ε+1 ⇒ ε) | Klz(z) → (ε-1 ⇒ ε)
S |     1                 |  1
        σ                    σ
       (8)             (9)
V |    ε   ≥ 0 ⇒ ∧R  | z ⇒ z
S |                0 | 1   0
       1.n         0 | σ   σ  ]
```

```
       (10)          (11)
V |    Sz(z) ⇒ R  | ε = 0 ⇒ ∧R
S |       0    0  |          0
          σ    0  |          0
```

Beschreibung:

1. Das erste Zeichen muß ein Anfangszeichen sein.
2. z_0 ist das letzte Zeichen der gerade untersuchten Aufbauliste. z_1 das folgende.

   Das erste z_0 wird als Negationszeichen angenommen, damit $Sq(z_0, z_1)$ erfüllt ist.
3. Die „Klammerbilanz" ε ist am Anfang 0 .
4. Das nächste Glied der Liste V ist das neue z_1; gibt es kein solches, so gehe über zu 10 .
5. Zwischen z_0 und z_1 muß die Folgebedingung Sq1 bestehen.
6. Ist z_1 ein Kla-Zeichen, so wird ε um Eins erhöht.
7. Ist z_1 ein Klz-Zeichen, so wird ε um Eins erniedrigt.
8. ε muß stets größer oder gleich Null sein.
9. z_1 ergibt das neue z_0 . Gehe zurück zu 4 .
10. Das letzte z_0 muß ein Schlußzeichen sein.
11. ε muß am Ende Null sein.

Der exakte Nachweis, daß der Ansatz von S.10 dem von S.9 entspricht, wird hier nicht durchgeführt.

Es wurde bereits erwähnt, daß dieser Bedingung auch solche Ausdrücke genügen, die überflüssige Klammern enthalten.

Wir können dabei folgende Fälle unterscheiden:

a) Einklammerung von Variablen:

$$(a) \wedge b$$

b) Einklammerung des ganzen Ausdrucks:

$$(a \vee b)$$

c) Mehrfache Einklammerung:

$$((a \wedge b)) \vee c$$

d) Klammern, die auf Grund des assoziativen Gesetzes fortfallen können:

$$(a \vee b) \vee b$$

e) Klammern, die nach den Regeln über die engere Bindung von Operationszeichen fortgelassen werden können:

$$(a \vee b) \wedge c$$

Die Fälle a, b, c sind besonders einfach und seien daher zuerst betrachtet.

Um diese Fälle auszuschließen, müssen wir neue Bildungsregeln für sinnvolle Ausdrücke schaffen. Hierzu bilden wir ein paar neue Prädikate:

Aa(x) = „x ist ein Verknüpfungsausdruck".
(Er kann mit Operationszeichen verknüpft werden.)

Ba(x) = „Die Zeichenfolge x kann eingeklammert werden".

Ca(x) = „Die Zeichenfolge x ist einfach eingeklammert".

Die Bildungsregeln lauten dann (vgl. S.4):

a) Eine einzelne Variable ist ein Verknüpfungsausdruck.

b) Durch Vorsetzen eines Negationszeichens vor einen Verknüpfungsausdruck entsteht ein einklammerbarer Ausdruck.

c) Durch Zwischensetzen eines Operationszeichens zwischen zwei Verknüpfungsausdrücke entsteht ein einklammerbarer Ausdruck.

d) Durch Einklammern eines einklammerbaren Ausdrucks entsteht ein einfach eingeklammerter Ausdruck.

e) Ein einklammerbarer Ausdruck bzw. ein einfach eingeklammerter Ausdruck ist auch ein Verknüpfungsausdruck.

f) Ein Verknüpfungsausdruck ist auch ein sinnvoller Ausdruck.

Ein eingeklammerter Ausdruck ist kein sinnvoller Ausdruck.

Formal lauten diese Ansätze wie folgt:

a) $Va'(V_0) \rightarrow Aa(V_0)$

b) $\left[V_0 = Lz(x,y) \wedge Neg(x) \wedge Aa(y)\right] \rightarrow Ba(V_0)$

c) $\left[V_0 = Lz(x,y,z) \wedge Aa(x) \wedge Op(y) \wedge Aa(z)\right] \rightarrow Ba(V_0)$

d) $\left[V_0 = Lz(x,y,z) \wedge Kla(x) \wedge Ba(y) \wedge Klz(z)\right] \rightarrow Ca(V_0)$

e) $Ba(V_0) \vee Ca(V_0) \rightarrow Aa(V_0)$

f) $Aa(V_0) \wedge \overline{Ca(V_0)} \rightarrow Sa1(V_0)$

Um auszudrücken, daß dies die einzigen Ansätze für Aa, Ba, Ca, Sa1 sind, müssen wir den Ansatz wie folgt schreiben:

$$\vdash \quad \left[Va'(V_0) \vee Ba(V_0) \vee Ca(V_0) \sim Aa(V_0) \right]$$

$$\wedge \left[\left(V_0 = Lz(x,y) \wedge Neg(x) \wedge Aa(y)\right) \vee \left(V_0 = Lz(x,y,z) \wedge Aa(x) \wedge Op(y) \wedge Aa(z)\right) \sim Ba(V_0) \right]$$

$$\wedge \left[\left(V_0 = Lz(x,y,z) \wedge Kla(x) \wedge Ba(y) \wedge Klz(z)\right) \sim Ca(V_0) \right]$$

$$\wedge \left[Aa(V_0) \wedge \overline{Ca}(V_0) \sim Sa1(V_0) \right]$$

Um aus diesem impliziten Ansatz $Sa1(V_0)$ explizit zu entwickeln, stellen wir zunächst wieder die Bedingung für Sq1(x,y) auf.

Es zeigt sich bei näherer Untersuchung, die hier übergangen wird, daß der bisherige Ansatz für Sq1 auch hierfür gilt.

Überhaupt gilt allgemein:

$$Sa1(x) \rightarrow Sa0(x) \quad .$$

Das heißt, wenn ein Ausdruck der strengeren Regel Sa1 genügt, so genügt er auch der weniger strengen Sa0 . Um Sa1 zu erhalten, muß Sa0 durch weitere Klammerregeln ergänzt werden. Es dürfen nur Ausdrücke der Form Ba(x) eingeklammert werden. Diese können aber wiederum nur durch Verknüpfungen von Ausdrücken mit Operationszeichen bzw. Negationszeichen entstehen. Es muß sich also zwischen zwei einander zugeordneten Klammerzeichen stets mindestens ein Op- bzw. Neg-Zeichen befinden. Z.B.:

$$(a \wedge b)$$

$$(a \vee b \wedge c)$$

$$(-a)$$

$$(-a \vee b)$$

Jedoch darf dieses Operationszeichen nicht durch weitere Unterklammern eingeklammert sein, z.B.:

$$((-a)) \quad ,$$

da dann Doppeleinklammerung vorliegt.

Die Formulierung dieser Bedingung läßt sich mit Hilfe der Klammerbilanz ε durchführen. ε gibt für jedes Va- bzw. Neg- bzw. Op-Zeichen an, wieviel Klammern beseitigt werden müssen, um die Einklammerung des Zeichens zu beseitigen.

Dipl.-Ing. K. Zuse
Ingenieurbüro
und Apparatebau
Berlin

Beispiel:

$$\begin{array}{c|l} & (a \wedge b) \vee (a \wedge (-b \vee c)) \\ \varepsilon & 1\;1\;1\;\;0\;\;\;1\;1\;\;\;2\,2\,2\,2 \end{array}$$

Es muß nun innerhalb jedes Klammerpaares mindestens ein Operations- bzw. Negationszeichen der betreffenden Klammerstufe ε auftreten.

Diese Aussagen werden durch Hilfswerte $\begin{array}{c} z \\ 2 \\ \varepsilon \end{array}$ dargestellt.

Wir erhalten dann folgenden Rechenplan für Sa1:

Um die Einklammerung des Gesamtausdrucks auszuschließen, muß für den Fall, daß $\begin{array}{c} V \\ 0 \end{array}$ nicht eine einzelne Variable ist, $\begin{array}{c} z \\ 2 \\ 0 \end{array}$ positiv sein.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
 & R(V\;\;) & = & R & R & = & \mathrm{Sa1}(V) \\
V & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
S & \square\times\sigma & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc}
 & \mathrm{Az}(V) & \Rightarrow & \wedge R & \theta & \Rightarrow & z & 0 & \Rightarrow & \varepsilon & - & \Rightarrow & z & \theta & \Rightarrow & z \\
V & 0 & & 0 & & & 0 & & & & & & 2 & & & 0 \\
K & 0 & & & & & & & & & & & 0 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
 & W \left[\begin{array}{l}
\begin{array}{cccc|cccc}
\mu x(x \in V\;\;) & \Rightarrow & z & & \mathrm{Sq1}(z, & z) & \Rightarrow & \wedge R \\
\quad\quad\quad\;\; 0 & & 1 & & 0 & 1 & & 0
\end{array} \\[2ex]
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Kla}(z) & \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|ccc} \varepsilon + 1 & \Rightarrow & \varepsilon & - & \Rightarrow & z \\ & & & & & 2 \\ & & & & & \varepsilon \end{array} \right] \\
1 & &
\end{array} \\[2ex]
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Op}(z) & \vee & \mathrm{Neg}(z) & \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc} + & \Rightarrow & z \\ & & 2 \\ & & \varepsilon \end{array} \right] \\
1 & & 1 & &
\end{array} \\[2ex]
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Klz}(z) & \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c} z & \Rightarrow & \wedge R & \varepsilon - 1 = \varepsilon \\ 2 & & 0 & \\ \varepsilon & & & \end{array} \right] \\
1 & &
\end{array} \\[2ex]
\begin{array}{ccc|ccc}
\varepsilon \geq 0 & \Rightarrow & \wedge R & z & \Rightarrow & z \\
 & & 0 & 1 & & 0
\end{array}
\end{array} \right] \\
V & \\
K &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|ccccc}
 & \mathrm{Sz}(z) & \Rightarrow & \wedge R & \varepsilon = 0 & \Rightarrow & \wedge R & (\overline{\mathrm{Va}'}(V) & \rightarrow & z) & \Rightarrow & \wedge R \\
V & 0 & & 0 & & & 0 & 0 & & 2 & & 0 \\
K & & & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Wir kommen nun zu den Fällen d) und e) von S.12 oben.

Es sollen jetzt auch solche Klammern ausgeschlossen werden, welche auf Grund der „Rangordnung" zwischen den Operationszeichen fortgelassen werden können.

Unter Rangordnung sei die Ordnung der Zeichen verstanden, bei der das enger bindende Zeichen den niederen Rang hat. Das Zeichen von höherem Rang hat die größere Reichweite. Die Operationen des Aussagenkalküls sind dann wie folgt geordnet:

$$\begin{array}{cccccc} - & \vee & \wedge & \rightarrow & \nsim & \sim \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Bezeichnen wir den Rang eines Operationszeichens mit Rg(x), so können wir jedem Ausdruck y einen Rang Rg(y) zuordnen. Dabei geben wir einem einfachen Va-Zeichen den Rang 0.

Da zusammengesetzte Ausdrücke nur unter Beteiligung von Operationszeichen entstehen können, gibt es für jeden zusammengesetzten Ausdruck ein Operationszeichen, welches der letzten Zusammensetzung entspricht. Der Rang dieses Zeichens ist gleich dem Rang des zusammengesetzten Ausdrucks.

Wir stellen jetzt wiederum neue Regeln für sinnvolle Ausdrücke auf:

a) Ein einzelnes Variablenzeichen ist ein sinnvoller Ausdruck vom Rang 0.

b) Durch Vorsetzen eines Neg-Zeichens vor einen sinnvollen Ausdruck entsteht dann wieder ein sinnvoller Ausdruck, wenn sein Rang gleich Null ist, oder falls er ungleich Null ist, der Ausdruck eingeklammert ist.

c) Durch Zwischensetzen eines Operationszeichens, für welches das assoziative Gesetz gilt, [$\vee$, $\wedge$] zwischen zwei sinnvolle Ausdrücke entsteht dann wieder ein sinnvoller Ausdruck, wenn die zu vereinigenden Ausdrücke folgende Bedingungen erfüllen:

   Entweder ihr Rang ist kleiner oder gleich dem des Operationszeichens, oder er ist größer und sie sind einfach eingeklammert.

d) Durch Zwischensetzen eines Operationszeichens, für welches nicht das assoziative Gesetz gilt, [$\rightarrow$, $\nsim$, $\sim$] zwischen zwei sinnvolle Ausdrücke entsteht dann wieder ein sinnvoller Ausdruck, wenn die zu vereinigenden Ausdrücke folgende Bedingungen erfüllen:

   Entweder ihr Rang ist kleiner als der des Op-Zeichens, oder er ist gleich oder größer und sie sind einfach eingeklammert.

e) Ein einfach eingeklammerter Ausdruck entsteht durch Einklammern eines sinnvollen nicht eingeklammerten Ausdrucks.

f) Der Rang zusammengesetzter Ausdrücke entsprechend b, c, d ist gleich dem des bei der letzten Zusammensetzung beteiligten Operationszeichens.

g) Bei Einklammerung eines Ausdrucks bleibt sein Rang erhalten.

Die exakte Formulierung der Regeln a – g lautet:

a) $Va'(\underset{0}{V}) \rightarrow Sa2(\underset{0}{V}) \wedge Rg(\underset{0}{V}) = 0$

b)f) $\left[\underset{0}{V} = Lz(x,y) \wedge Neg(x) \wedge Sa2(y) \wedge \big((Rg(y) = 0) \sim Kl'(y)\big)\right]$

$$\rightarrow Sa2(y) \wedge Rg(y) = 0$$

c)f) $\Big[\underset{0}{V} = Lz(x,y,z) \wedge Sa2(x) \wedge Opa(y) \wedge Sa2(z)$

$\wedge \big(Rg(x) \leqslant Rg(y) \sim Kl'(x)\big) \wedge \big(Rg(z) \leqslant Rg(y) \sim Kl'(z)\big)\Big]$

$$\rightarrow Sa2(\underset{0}{V}) \wedge Rg(\underset{0}{V}) = Rg(y)$$

d)f) $\Big[\underset{0}{V} = Lz(x,y,z) \wedge Sa2(x) \wedge Op(y) \wedge \overline{Opa}(y) \wedge Sa2(z)$

$\wedge \big(Rg(x) < Rg(y) \sim Kl'(x)\big) \wedge \big(Rg(z) < Rg(y) \sim Kl'(z)\big)\Big]$

$$\rightarrow Sa2(\underset{0}{V}) \wedge Rg(\underset{0}{V}) = Rg(y)$$

e)g) $\left[\underset{0}{V} = Lz(x,y,z) \wedge Kla(x) \wedge Sa2(y) \wedge \overline{Kl'}(y) \wedge Klz(z)\right]$

$$\rightarrow Kl'(\underset{0}{V}) \wedge Rg(\underset{0}{V}) = Rg(y)$$

Bedeutung der neuen Prädikate:

Kl'(x) „Der Ausdruck x ist ein einfach eingeklammerter sinnvoller Ausdruck."

Opa(x) „Das Zeichen x ist ein Operationszeichen, für welches das assoziative Gesetz gilt."

Der entsprechende Rechenplan für Sa2 ergibt sich wie folgt:

Es gilt $\quad Sa2(\underset{0}{V}) \rightarrow Sa1(\underset{0}{V})$ (s.S.14)

Es bleiben die Bedingungen von Sa2 sämtlich erhalten, jedoch werden die Bedingungen für die Berechtigung einer Klammer verschärft.

Es muß zunächst zu jedem eingeklammerten Ausdruck der zugehörige Rang ermittelt werden, ferner der Rang desjenigen Operationszeichens, welches mit dieser Klammer kombiniert ist, denn nach den aufgestellten Regeln muß jeder Klammerausdruck ein „inneres" und ein „äußeres" Operationszeichen haben. Ist x das innere und y das äußere Op-Zeichen, so ist eine Einklammerung dann berechtigt, wenn gilt:

$$\big(Rg(x) > Rg(y)\big) \vee \big(x = y \wedge \overline{Opa}(x)\big) .$$

Das innere Op-Zeichen ist dasjenige innerhalb des Klammerausdrucks, aber nicht innerhalb von Unterklammern dieses Ausdrucks, welches den höchsten Rang hat.

Das äußere Op-Zeichen ist von den beiden (falls vorhanden) dem Klammerausdruck benachbarten Op-Zeichen das mit dem niedereren Rang.

Beispiel:

$$a \wedge \big(b \rightarrow (c \sim d) \wedge e\big) \vee g$$

Äußere Klammer:

Inneres Op-Zeichen:	$\rightarrow$	Rang 3
Äußeres Op-Zeichen:	$\vee$	Rang 1

Innere Klammer:

Inneres Op-Zeichen:	$\sim$	Rang 5
Äußeres Op-Zeichen:	$\wedge$	Rang 2

Der Rang der beiden Zeichen muß für jeden Klammerausdruck ermittelt werden. Um diese Bildung wieder „laufend", d.h. unter schrittweiser Betrachtung der aufeinanderfolgenden Zeichen eines Ausdruckes durchführen zu können, müssen jeweils die betreffenden Werte bis zur Klammerstufe ε gespeichert werden.

Es werden jeder Klammerstufe $0 - \varepsilon$ folgende Werte zugeordnet:

$\underset{\varepsilon}{\overset{z}{3}}$ = höchster Rang der bisher betrachteten Op-Zeichen des gerade betrachteten Klammerausdrucks der Stufe ε (inneres Op-Zeichen).

$\underset{\substack{4\\ \varepsilon}}{z}$ = niedrigster Rang der bisher betrachteten Operationszeichen des gerade betrachteten Klammerausdrucks der Stufe ε. (Äußeres Op-Zeichen der Klammer der Stufe $\varepsilon+1$.)

$\underset{\substack{5\\ \varepsilon}}{z}$ = „Das zu $\underset{\substack{4\\ \varepsilon}}{z}$ gehörige Op-Zeichen ist ein Zeichen der Eigenschaft Opa".

z_6 gibt an, ob das vorhergehende Zeichen ein Klz-Zeichen war.

Die Rechnung erfolgt nun so, daß, sobald das vorhergehende Zeichen ein Klz-Zeichen war (z_6), also sobald ein Klammerausdruck abgeschlossen ist und das darauffolgende Zeichen bekannt ist, die Berechtigung der Einklammerung untersucht wird (entsprechend Formel S.17). Hierauf werden die Werte $\underset{\substack{3\\ \varepsilon}}{z}$, $\underset{\substack{4\\ \varepsilon}}{z}$, $\underset{\substack{5\\ \varepsilon}}{z}$ gelöscht.

Am Anfang jeder neuen Klammeruntersuchung müssen diese Angaben folgende Werte haben:

$$\underset{\substack{3\\ \varepsilon}}{z} = 0 \quad\Big|\quad \underset{\substack{4\\ \varepsilon}}{z} = 5 \quad\Big|\quad \underset{\substack{5\\ \varepsilon}}{z} = -$$

$\underset{\substack{4\\ \varepsilon}}{z}$ muß gleich dem höchsten möglichen Rang der Op-Zeichen sein, damit bei der ersten Bildung

$$\mathrm{Min}(\underset{\substack{4\\ \varepsilon}}{z}, \mathrm{Rg}(\underset{1}{z})) \Rightarrow \underset{\substack{4\\ \varepsilon}}{z}$$

sich für $\underset{\substack{4\\ \varepsilon}}{z}$ $\mathrm{Rg}(\underset{1}{z})$ ergibt.

Wir setzen zunächst an:

! Fehlerhaft
s.S. 23

```
  | R(V    ) ⇒ R  | R = Sa2'(V)
V |   o        o  | o        o
S |  □×σ       o  |

  | Az(V    ) ⇒ ΛR | θ ⇒ z | 0 ⇒ ε | - ⇒ z | 0 ⇒ z | 5 ⇒ z | - ⇒ z | - ⇒ z
V |    o        o  |     o |       |     2 |     3 |     4 |     5 |     6
K |    o           |       |       |     o |     o |     o |     o |
S |    σ        o  | σ   σ |     1 |     o |   1.3 |   1.3 |     o |     o

  | W[μx(x ε V          ) ⇒ z | Sq1(z, z) ⇒ ΛR
V |          o              1 |     o  1     o
K |
S |   σ      □×σ            σ |     σ  σ     o

  |  Op(z) v Neg(z) → [+ ⇒ z | Rg(z) ⇒ z | Maj(z   ,z  ) ⇒ z
V |     1        1       2 |     1    7 |     3   7       3
K |                      ε |            |     ε
S |     σ        σ       o |     σ  1.3 |   1.3 1.3     1.3 ]

  |                   z < z   → [z   ⇒ z | Opa(z) ⇒ z
V |                   7   4     7     4  |     1    5
K |                       ε           ε  |          ε
S |                 1.3 1.3   1.3   1.3  |     σ    o ]

  |                   z → [(z  > z  ) v (z   = z   ∧ z̄) ⇒ ΛR
V |                   6     3    4       3     4     5       o
K |                         ε+1  ε       ε+1   ε     ε
S |                   o     1.3  1.3     1.3   1.3   o

  |                         z     ⇒ z | Opa(z) ⇒ z
V |                         7       4 |     1    5
K |                                 ε |          ε
S |                         1.3   1.3 |     σ    o  ]]

  |  Kla(z) → [ε+1 ⇒ ε | - ⇒ z | 0 ⇒ z | 5 ⇒ z | - ⇒ z
V |     1              |     2 |     3 |     4 |     5
K |                    |     ε |     ε |     ε |     ε
S |           1      1 |     o |   1.3 |   1.3 |     o ]

  |  Klz(z) → [z ⇒ ΛR | ε-1 ⇒ ε
V |     1      2   o  |
K |            ε      |
S |            o   o  | 1     1 ]

  |  ε ≥ 0 ⇒ ΛR | Klz(z) ⇒ z | z ⇒ z
V |          o  |     1    6 | 1   o
S |  1       o  |     σ    o | σ   σ ]  ]

  |  Sz(z) ⇒ ΛR | ε = 0 ⇒ ΛR | (‾Va'(V)‾ → z) ⇒ ΛR
V |     o    o  |          o |       o     2      o
S |             |            |             o
```

Der Rechenplan für Sa2 sei an einem Beispiel demonstriert:

$$V_0 \equiv -(a \vee b) \rightarrow ((c \wedge d) \vee - b \rightarrow e) \sim f$$

V K	V_0	ε	z_0	z_1	$z_{20}\,z_{21}\,z_{22}$	z_{30}	z_{31}	z_{32}	z_{40}	z_{41}	z_{42}	$z_{50}\,z_{51}\,z_{52}$	z_6	z_7
		0			−	0			5			−	−	
1	−		−											0
		0			+	0			0			−	−	
2	(		−	(										
		1			+−	0	0		0	5		−−	−	
3	a		(	a										
		1			+	0	0		0	5		−−	−	
4	∨		a	∨										1
		1			++	0	1		0	1		−+	−	
5	b		∨	b										
		1			++	0	1		0	1		−+	−	
6	)		b	)										
		0			++	0	1		0	1		−+	+	
7	→		)	→										3
		0			++	3	1		3	1		−+	−	
8	{		→	{										
		1			+−	3	0		3	5		−−	−	
9	(		{	(										
		2			+−−	3	0	0	3	5	5	−−−	−	
10	c		(	c										
		2			+−−	3	0	0	3	5	5	−−−	−	
11	∧		c	∧										2
		2			+−+	3	0	2	3	5	2	−−+	−	
12	d		∧	d										
		2			+−+	3	0	2	3	5	2	−−+	−	
13	)		d	)										
		1			+−+	3	0	2	3	5	2	−−+	+	
14	∨		)	∨										1
		1			+++	3	1	2	3	1	2	−++	−	
15	−		∨	−										0
		1			+++	3	1	2	3	0	2	−−+	−	
16	b		−	b										
		1			+++	3	1	2	3	0	2	−−+	−	
17	→		b	→										3
		1			+++	3	3	2	3	0	2	−−+	−	
18	e		→	e										
		1			+++	3	3	2	3	0	2	−−+	−	
19	)		e	)										
		0			+++	3	3	2	3	0	2	−−+	+	
20	~		)	~										5
		0			+++	5	3	2	3	0	2	−−+	−	
21	f		~	f										
		0			+++	5	3	2	3	0	2	−−+	−	

Es ist bei den laufenden Zwischenwerten der Unterschied zwischen alten und neuen Werten links und rechts des Ergibt-Zeichen zu beachten. Deshalb sind die Werte teilweise zwischen die Zeilen gesetzt.

Der Ansatz von S.19 ist jedoch nicht vollkommen. Deshalb wurde er auch mit $Sa2'(\underset{0}{V})$ bezeichnet.

Durch Sa2' werden zwar sämtliche nach den Regeln überflüssige Klammern ausgeschlossen; aber es wird nicht kontrolliert, ob alle notwendigen Einklammerungen vorhanden sind.

Z.B. genügt dem Ansatz der Ausdruck

$$a \rightarrow b \rightarrow c$$

Nach Regel d) von S.15 kann solch ein Ausdruck aber nicht gebildet werden, sondern entweder der Ausdruck

$$(a \rightarrow b) \rightarrow c$$

oder der Ausdruck

$$a \rightarrow (b \rightarrow c) \quad .$$

Denn für das Implikationszeichen gilt nicht das assoziative Gesetz. Wenn also der durch ein $\rightarrow$ Zeichen mit einem anderen Ausdruck zu kombinierende Ausdruck ebenfalls eine Implikation ist, so muß diese eingeklammert werden, da Ranggleichheit vorliegt.

Dasselbe gilt für die Zeichen $\nsim$ und $\sim$.

Es ergibt sich folgende Forderung:

In der gleichen Klammerstufe darf höchstens je eins der Zeichen $\rightarrow$, $\nsim$, $\sim$ auftreten.

Wir benötigen also je Klammerstufe ε drei Ja-Nein-Werte, welche aussagen, ob in der gerade untersuchten Klammer die Zeichen bereits aufgetreten sind. Wir fassen diese drei Ja-Nein-Werte zu $\underset{\varepsilon}{\overset{z}{8}}$ zusammen.

Es bedeutet:

Imp(x) = x ist ein Implikationszeichen

Disv(x) = x ist ein Disvalenzzeichen

Aeq(x) = x ist ein Aequivalenzzeichen .

Der Ansatz von S.19 muß wie folgt ergänzt werden:

$$\begin{array}{c|c}
 & \mathrm{Op}(z) \rightarrow \\
V & 1 \\
S & \sigma
\end{array}
\begin{array}{cc|cc|cc}
\mathrm{Imp}(z) \Rightarrow & z & \mathrm{Disv}(z) \Rightarrow & z & \mathrm{Aeq}(z) \Rightarrow & z \\
1 & 10 & 1 & 11 & 1 & 12 \\
\sigma & 0 & \sigma & 0 & \sigma & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & \overline{\begin{array}{ccc} z & \wedge & z \\ 8 & & 10 \\ \varepsilon.0 & & \\ 0 & & 0 \end{array}} & \wedge & \overline{\begin{array}{ccc} z & \wedge & z \\ 8 & & 11 \\ \varepsilon.1 & & \\ 0 & & 0 \end{array}} & \wedge & \overline{\begin{array}{ccc} z & \wedge & z \\ 8 & & 12 \\ \varepsilon.2 & & \\ 0 & & 0 \end{array}} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \wedge R \\ 0 \\ \\ 0 \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc}
 & z \Rightarrow & z & z \Rightarrow & z & z \Rightarrow & z \\
V & 10 & 8 & 11 & 8 & 12 & 8 \\
K & & \varepsilon.0 & & \varepsilon.1 & & \varepsilon.2 \\
S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Ferner muß am Anfang gesetzt werden:

$$\begin{array}{c|c}
 & (-\,'\!-\;-) \Rightarrow z \\
V & 8 \\
K & 0 \\
S & 1.3
\end{array}$$

Ferner bei jedem Kla-Zeichen:

$$\begin{array}{c|c}
 & \mathrm{Kla}(z) \rightarrow \\
V & 1 \\
K & \\
S &
\end{array}
\left[\begin{array}{cc|cc|c}
\varepsilon+1 \Rightarrow & \varepsilon & (-\;-\;-) \Rightarrow & z & \ldots\ldots \\
 & & & 8 & \\
 & & & \varepsilon & \\
1 & 1 & & 1.3 &
\end{array}\right]$$

Der Ansatz von S.19 enthält einen Fehler. Für den Fall, daß das letzte Zeichen ein Klz-Zeichen ist, wird die Untersuchung für den zugehörigen Klammerausdruck nicht durchgeführt. Es genügt dem Ausdruck z.B. folgender Ausdruck:

$$a \wedge (b \vee c)$$

In diesem ist die Klammer überflüssig; jedoch kann das entsprechend Ansatz S.19 erst bei dem auf das Kla-Zeichen folgenden Zeichen festgestellt werden. Da dies nicht vorhanden ist, fällt diese Untersuchung aus.

Der Fehler wird wie folgt behoben:

a) Anstelle des μ-Ausdrucks wird ein i-Ausdruck gesetzt.

b) Im Falle daß ein Klz-Zeichen das letzte Zeichen ist, wird die Untersuchung des Klammerausdrucks sofort durchgeführt.

	R(V)	⇒ R	R =	Sa2(V)
V	o	o	o	o
S	m×σ	o		

	Az(V)	⇒ ∧R	Θ	⇒ z	0	⇒ ε	–	⇒ z	0	⇒ z	5	⇒ z
V	o	o		o				2		3		4
K	o							o		o		o
S	σ		σ	σ		1		o		1.3		1.3

	–	⇒ z	–	⇒ z	(– – –)	⇒ z
V		5		6		8
K		o				o
S		o		o		1.3

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung:

```
   | W1   [ V ⇒ z | Sq1(z, z) ⇒ ∧R
 V | m-1    o   1 |     o  1     o
 K |        i     |
 S |        σ   σ |     σ  σ     o

     Op(z)vNeg(z)→[+ ⇒ z | Rg(z) ⇒ z | Maj(z , z ) ⇒ z ]
 V |    1       1        2 |    1     7 |     3   7      3
 K |                     ε |            |     ε          ε
 S |                     o |    σ   1.3 |   1.3 1.3    1.3

 V |               [z   < z  →[z   ⇒  z | Opa(z) ⇒ z ]
 K |                7     4     7     4 |     1    5
 S |                      ε             |          ε
                   1.3  1.3    1.3  1.3 |          o

     Op(z)→[Imp(z) ⇒ z | Disv(z) ⇒ z | Aeq(z) ⇒ z ]
 V |    1       1    10 |      1   11 |     1   12
 K |                    |             |
 S |            σ    o  |      σ    o |     σ    o

          ____________  ____________  ____________
 V |      z    ∧ z   ∧ z    ∧ z   ∧ z    ∧ z   ⇒ ∧R
 K |      8     10     8     11     8     12      o
 S |      ε.o          ε.1          ε.2
          o      o     o      o     o      o      o

 V |      z   ⇒  z  | z   ⇒  z  | z   ⇒  z
 K |      10     8  | 11     8  | 12     8
 S |             ε.o|        ε.1|        ε.2
          o      o  | o      o  | o      o   ]

     Klε(z)→[ε+1 ⇒ ε | - ⇒ z | 0 ⇒ z | 5 ⇒ z | - ⇒ z | (---)⇒z ]
 V |    1                   2       3       4       5         8
 K |                        ε       ε       ε       ε         ε
 S |          1     1 |     o     1.3     1.3       o       1.3

     Klz(z)→[z ⇒ ∧R | ε-1 ⇒ ε ]
 V |    1    2    o |
 K |         ε      |
 S |         o    o | 1     1

     (Op(z)∧z)v(Klz(z)∧i=m-1)→[(z   >z  )v(z   =z  ∧ z̄)⇒∧R
 V |     1   6       1           3    4     3    4   5    o
 K |                             ε+1  ε     ε+1  ε   ε
 S |                             1.3 1.3    1.3 1.3  o

 V |                             z    ⇒ z | Opa(z) ⇒ z
 K |                             7      4 |     1    5
 S |                                    ε |          ε
                                 1.3  1.3 |     σ    o  ]

     ε > 0 ⇒ ∧R | Klz(z) ⇒ z | z ⇒ z
 V |          o |     1    6 | 1   o
 K |            |            |
 S | 1        o |     σ    o | σ   σ  ]
```

Fortsetzung S.25

Fortsetzung:

$$
\begin{array}{c|llllllllll}
 & Sz(z) & \wedge & \varepsilon & = 0 & \wedge & \Big(\overline{V\varepsilon'}(V &) & \rightarrow z\Big) & \Rightarrow & \wedge R \\
V & \quad 0 & & & & & \qquad 0 & & \quad 2 & & \quad 0 \\
S & \quad \sigma & & 1 & & & \qquad \square\times\sigma & & \quad 0 & & \quad 0
\end{array}
$$

3) Vereinfachung von Ausdrücken: Sa

Ein Ausdruck, auf den das Prädikat Sa0 zutrifft, soll durch Fortlassen doppelter Verneinungen und überzähliger Klammern vereinfacht werden.

Die Aufgabe ist in einmaligem Durchlauf nicht lösbar, da erst nach Abschluß einer Klammer und Untersuchung des folgenden Zeichens festgestellt werden kann, ob diese nötig ist.

Es wird beim erstmaligen Durchlauf eine Ergänzungsanbabe z_{16} gebildet, durch welche jedem Glied von V_0 ein Ja-Nein-Wert zugeordnet wird, welcher angibt, daß das betreffende Zeichen überflüssig ist. Es kann das zunächst nur für überflüssige Negationszeichen und Klz-Zeichen erfolgen. Die zugehörigen Kla-Zeichen ergeben sich durch nochmaligen Rückwärtsdurchlauf von V_0 .

Der Rechenplan lehnt sich eng an den für Sa2 an. Jedoch sind hiervon nur die Glieder nötig, die der Untersuchung dienen, ob eine Klammer berechtigt ist. Es wird hierbei gegenüber Sa2 noch eine kleine Variante eingeführt. Das äußere Operationszeichen wird bei Auftreten eines Kla- bzw. Klz-Zeichens gebildet.

Zur Ermittlung doppelter Negationszeichen dient der Ja-Nein-Wert z_7 , welcher bei jedem Negationszeichen seinen Wert wechselt. Am Anfang jeder neuen Periode muß er negativ sein. Ist z_7 positiv, so wird z_{16_i} positiv. Bei einer Folge von mehreren Negationszeichen erhält dann also jedes zweite die Markierung z_{16_i} .

Beim Rückwärtsdurchlauf von V_0 von m-1 bis 0 wird wieder die Klammerstufe ε gebildet. z_{17_ε} gibt an, ob die Klammer der Stufe ε überflüssig ist. Das zugehörige Kla- und Klz-Zeichen kann dann fortfallen. Ebenso kann bei Negationszeichen, falls z_{16_i} positiv ist, dieses und das vorhergehende (i-1) fortfallen.

```
  | R(V   ) ⇒ R                     m ≥ n
V |   o       o
S |   m×σ     n×σ

  | 0 ⇒ ε | - ⇒ z | 0 ⇒ z  | - ⇒ z
V |       |     2 |     3  |     7
K |       |     o |     o  |
S |     1 |     o |     1.3|     o

  | W1  ⎡Op(V)∨Neg(V) → ⎡+ ⇒ z | Maj(z  , Rg(V)) ⇒ z ⎤                      ⎤
V | m-1 ⎢   o      o    ⎢    2 |     3      o       3 ⎥                      ⎥
K |     ⎢   i      i    ⎢    ε |     ε   ,  i       ε ⎥                      ⎥
S |     ⎢   σ      σ    ⎣    o |     1.3    σ       1.3⎦                     ⎥
                                                                            
  |     ⎢Kla(V) → ⎡ε+1 ⇒ ε | - ⇒ z | 0 ⇒ z  | 5 ⇒ z  | - ⇒ z ⎤             ⎥
V |     ⎢   o     ⎢        |     2 |     3  |     4  |     5 ⎥             ⎥
K |     ⎢   i     ⎢        |     ε |     ε  |     ε  |     ε ⎥             ⎥
S |     ⎢   σ     ⎢1     1 |     o |     1.3|     1.3|     o ⎥             ⎥
                  ⎢                                          ⎥
  |     ⎢         ⎢i≠0∧¬Kla(V ) → ⎡Rg(V ) ⇒ z | Opa(V ) ⇒ z | + ⇒ z ⎤      ⎥
V |     ⎢         ⎢       o       ⎢  o      4 |   o       5 |     6 ⎥      ⎥
K |     ⎢         ⎢       i-1     ⎢  i-1    ε |   i-1     ε |     ε ⎥      ⎥
S |     ⎢         ⎣       σ       ⎣  σ      1.3|  σ       o |     o ⎦⎦     ⎥
                                                                            
  |     ⎢Klz(V) → ⎡i≠m-1∧Op(V ) → ⎡Rg(V   ) < z → ⎡Rg(V ) ⇒ z ⎤⎤           ⎥
V |     ⎢   o     ⎢       o       ⎢  o        4   ⎢  o      4 ⎥⎥           ⎥
K |     ⎢   i     ⎢       i+1     ⎢  i+1          ⎢  i+1    ε ⎥⎥           ⎥
S |     ⎢   σ     ⎢       σ       ⎢  σ        1.3 ⎢  σ      1.3⎥⎥          ⎥
                  ⎢               ⎢               ⎢           ⎥⎥           ⎥
  |     ⎢         ⎢               ⎢               ⎢Opa(V ) ⇒ z⎥⎥           ⎥
V |     ⎢         ⎢               ⎢               ⎢  o       5⎥⎥           ⎥
K |     ⎢         ⎢               ⎢               ⎢  i+1     ε⎥⎥           ⎥
S |     ⎢         ⎢               ⎢               ⎣          o⎦⎥           ⎥
                  ⎢               ⎢                            ⎥           ⎥
  |     ⎢         ⎢               ⎢ + ⇒ z                      ⎥           ⎥
V |     ⎢         ⎢               ⎢     6                      ⎥           ⎥
K |     ⎢         ⎢               ⎢     ε                      ⎥           ⎥
S |     ⎢         ⎢               ⎣     o                      ⎦           ⎥
                  ⎢                                                        ⎥
  |     ⎢         ⎢ ‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾            ⎥
  |     ⎢         ⎢z ∧ z ∧ (z   > z  ) ∨ (z   = z   ∧ ¬z) ⇒ z              ⎥
V |     ⎢         ⎢2   6    3     4       3     4     5      16            ⎥
K |     ⎢         ⎢ε   ε    ε     ε       ε     ε     ε      i             ⎥
S |     ⎢         ⎢o   o    1.3   1.3     1.3   1.3   o      o             ⎥
                  ⎢                                                        ⎥
                  ⎣ε - 1 ⇒ ε                                               ⎥
                                                                           ⎥
  |     ⎢Neg(V) ∧ z ⇒ z  | Neg(V) ∧ ¬z ⇒ z                                 ⎥
V |     ⎢   o     7   16 |    o      7   7                                 ⎥
K |     ⎢   i         i  |    i                                            ⎥
S |     ⎣   σ     o   o  |    σ      o                                     ⎦
```

Fortsetzung nächste Seite

$$\begin{array}{c|llllllll}
 & W2(m-1,\ 0) & \Big[\ \mathrm{Klz}(V) & \rightarrow & \Big[\ \varepsilon+1 \Rightarrow \varepsilon & \Big| & z & \Rightarrow & z\ \Big] \\
V & & \quad 0 & & & & 16 & & 17 \\
K & & \quad i & & & & i & & \varepsilon \\
S & & \quad \sigma & & \Big. & & 0 & & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|llll}
 & \mathrm{Kla}(V) & \wedge\ z & \Rightarrow & z \\
V & \quad 0 & 17 & & 16 \\
K & \quad i & \varepsilon & & i \\
S & \quad \sigma & 0 & & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|llll}
 & \mathrm{Neg}(V) & \wedge\ z & \Rightarrow & z \\
V & \quad 0 & 16 & & 16 \\
K & \quad i & i & & i-1 \\
S & \quad \sigma & 0 & & 0
\end{array}\ \Big]$$

$$\begin{array}{c|llllll}
 & W1 & \Big[\ \bar{z} & \rightarrow & V & \Rightarrow & \mu R \\
V & m-1 & \quad 16 & & 0 & & \quad 0 \\
K & & \quad i & & i & & \\
S & & \quad 0 & & \sigma & & \quad \square\times\sigma\ \Big]
\end{array}$$

Weitere Vereinfachungen von Ausdrücken werden zunächst nicht behandelt.

5000 1.44

4) Einführung der Maschinenform für aussagenlogische Ausdrücke:

Bevor auf die weitere Mechanisierung des Kalküls eingegangen wird, empfiehlt es sich vorerst, eine für die Zwecke der Mechanisierung geeignete Form der Ausdrücke zu schaffen. Da diese Form hauptsächlich der Bearbeitung durch Rechenmaschinen dienen soll, wird sie als „Maschinenform" oder kurz „M-Form" bezeichnet.

An Stelle der zwischen die Variablen gesetzten Operationszeichen treten Funktionszeichen, welche vor die Klammern gesetzt werden.

Wir schreiben also zunächst:

statt	$a \wedge b$	$\wedge(a,b)$
	$a \vee b$	$\vee(a,b)$
	$a \rightarrow b$	$\rightarrow(a,b)$ u.s.w.

Bei Operationen, für welche das assoziative Gesetz gilt, kann das Funktionszeichen mehrere Variablen haben:

$$a \vee b \vee c \vee d \quad | \quad \vee(a, b, c, d)$$

Zusammengesetzte Ausdrücke erhalten dann folgende Form:

$a \wedge b \vee c \sim d$	$\sim(\wedge(a, \vee(b, c)))$
$(a \wedge b) \vee (c \rightarrow d)$	$\vee(\wedge(a, b), \rightarrow(c, d))$

Negationen werden wie folgt dargestellt:

Einfache Variable werden wie bisher negiert. Die Negation zusammengesetzter Ausdrücke wird durch Negation der zugehörigen Op-Zeichen angezeigt.

$\overline{\bar{a} \vee b} \wedge c$	$\wedge(\overline{\vee}(,\bar{a},b))$
$\overline{a \vee \bar{b} \sim \bar{a} \vee b}$	$\overline{\sim}(\vee(a,\bar{b}), \overline{\vee}(\bar{a},b))$

Wir können nun zunächst unter der Voraussetzung, daß die Variablen aus einzelnen Zeichen bestehen, die Kommazeichen fortlassen.

Ferner lassen sich die Klammern wie folgt eliminieren:

Jedem Operationszeichen wird ein Rang zugeordnet. Der Rang ist die Klammerstufe des Ausdrucks der auf das Operationszeichen folgt. Z.B. haben wir bei folgenden Ausdrücken folgende Rangstufen der Operationszeichen:

Polnische Notation?

Rg | $\underset{1}{\vee}(a,b)$ | $\underset{3}{\sim}(\underset{2}{\wedge}(a,\underset{1}{\vee}(b,c)))$

Rg | $\underset{2}{\overline{\sim}}(\underset{1}{\vee}(a,\bar{b}),\underset{1}{\bar{\vee}}(\bar{a},b))$

Diese Ausdrücke können nunmehr durch Fortlassen der Klammer- und Kommazeichen eindeutig dargestellt werden:

Rg | $\underset{1}{\vee}ab$ | $\underset{3}{\sim}\underset{2}{\wedge}a\underset{1}{\vee}bc$ | $\underset{2}{\overline{\sim}}\underset{1}{\vee}a\bar{b}\underset{1}{\bar{\vee}}\bar{a}b$

Die „Reichweite" eines Operationszeichens geht jetzt stets bis vor das nächste Operationszeichen mit gleichem oder höherem Rang.

Es könnte auch die Rangordnung der Op-Zeichen an sich entsprechend S.15 ausgenutzt werden, wodurch der höchste Rang einer Formel erniedrigt werden könnte.

Die hierdurch gewonnene Vereinfachung wird aber durch kompliziertere Rechenpläne erkauft.

Diese Form erlaubt jedoch noch Zweideutigkeiten. Z.B. ergeben folgende verschiedene Ausdrücke dieselben M-Formen:

$a \vee b \wedge c \wedge d$ aeq $\underset{2}{\wedge}\underset{1}{\vee}a\,b\,c\,d$

$a \vee b \vee c \wedge d$ aeq $\underset{2}{\wedge}\underset{1}{\vee}a\,b\,c\,d$

Es kann dies nur bei Aufeinanderfolge eines Konjunktions- und eines Disjunktionszeichens erfolgen bzw. umgekehrt. Z.B. tritt dieselbe Zweideutigkeit bei Vertauschung von $\wedge$ und $\vee$ in obigen Formeln ein:

$(a \wedge b) \vee c \vee d$ aeq $\underset{2}{\vee}\underset{1}{\wedge}a\,b\,c\,d$

$(a \wedge b \wedge c) \vee d$ aeq $\underset{2}{\vee}\underset{1}{\wedge}a\,b\,c\,d$

Jedoch ist bei Operationen, welche stets genau zwei Operanden aufweisen müssen, eine Zweideutigkeit nicht möglich:

$a \vee b \vee c \rightarrow d$ aeq $\underset{2}{\rightarrow}\underset{1}{\vee}a\,b\,c\,d$

$(c \sim d) \wedge a \wedge b$ aeq $\underset{2}{\wedge}\underset{1}{\sim}c\,d\,a\,b$

Im ersten Fall muß von den Variablen a, b, c, d die letzte dem $\rightarrow$-Zeichen zugeordnet sein, da nur so die Bedingung, daß dem $\rightarrow$-Zeichen zwei Operanden zugeordnet sind, erfüllt werden kann. Das gleiche gilt für den zweiten Ausdruck, indem die Variablen c, d dem $\sim$-Zeichen zugeordnet sein müssen und die Variablen a, b dem $\wedge$-Zeichen.

Diese Zweideutigkeiten lassen sich auf verschiedene Weise beheben.

a) Änderung der Anordnung entsprechend dem Kommutationsgesetz:

$$a \vee b \wedge c \wedge d \quad \text{aeq} \quad c \wedge d \wedge a \vee b \quad \Big| \quad \underset{2}{\wedge}\, c\; d \underset{1}{\vee} a\; b$$

$$a \vee b \vee c \wedge d \quad \text{aeq} \quad d \wedge a \vee b \vee c \quad \Big| \quad \underset{2}{\wedge}\, d \underset{1}{\vee} a\; b\; c$$

Dieses Verfahren erfordert keinerlei zusätzliche Zeichen, jedoch formale Umformungen.

b) Rangzuordnungen zu Variablen:

$$a \vee b \wedge c \wedge d \quad \text{aeq} \quad \underset{2}{\wedge}\underset{1}{\vee}\, \underset{0}{a}\; \underset{0}{b}\; \underset{1}{c}\; \underset{1}{d}$$

$$a \vee b \vee c \wedge d \quad \text{aeq} \quad \underset{2}{\wedge}\underset{1}{\wedge}\, \underset{0}{a}\; \underset{0}{b}\; \underset{0}{c}\; \underset{1}{d}$$

c) Hilfsoperation der Identität $I(x)$.

$$I(x) = x\,.$$

Hierdurch Möglichkeit der Rangzuordnung zu I :

$$a \vee b \wedge c \wedge d \quad \text{aeq} \quad \underset{2}{\wedge}\underset{1}{\vee}\, a\; b\; \underset{1}{I}\; c\; I\; d$$

$$a \vee b \vee c \wedge d \quad \text{aeq} \quad \underset{2}{\wedge}\underset{1}{\vee}\, a\; b\; c\; \underset{1}{I}\; d$$

d) Trennzeichen:

$$a \vee b \wedge c \wedge d \quad \text{aeq} \quad \underset{2}{\wedge}\underset{1}{\vee}\, a\; b \mid c\; d$$

$$a \vee b \vee c \wedge d \quad \text{aeq} \quad \underset{2}{\wedge}\underset{1}{\vee}\, a\; b\; c \mid d$$

e) Einbeziehung der Trennzeichen in die Variablenzeichen: Den Variablenzeichen wird ein Ja-Nein-Wert zugeordnet, welcher angibt, ob die Variable am Ende eines Unterausdrucks steht:

$$a \vee b \wedge c \wedge d \quad \text{aeq} \quad \underset{2}{\wedge}\underset{1}{\vee}\, a\; \underset{\cdot}{b}\; c\; d$$

$$a \vee b \vee c \wedge d \quad \text{aeq} \quad \underset{2}{\wedge}\underset{1}{\vee}\, a\; b\; \underset{\cdot}{c}\; d$$

Von allen Methoden erfordern, abgesehen von a), die Methoden d) und e) den kleinsten Aufwand.

Es wird für das Folgende die Methode d) benutzt, also mit Trennzeichen gearbeitet. Diese lassen sich dann durch Anwendung von Methode a) leicht beseitigen.

Anmerkung: Form d) ist unzureichend, besser Form e) verwenden.

5200 1.44

Wir stellen noch einmal einige Formeln in der S-Form und in der M-Form gegenüber:

S-Form	M-Form
$\bar{a}$	$\bar{a}$
$a \wedge b$	$\wedge\ a\ b$
$a \rightarrow b$	$\rightarrow a\ b$
$a \vee b \vee c \vee d$	$\vee\ a\ b\ c\ d$
$a \wedge b \vee c \sim d$	$\underset{3}{\sim}\ \underset{2}{\wedge}\ a\ \underset{1}{\vee}\ b\ c$
$(a \wedge b) \vee (c \rightarrow d)$	$\underset{2}{\vee}\underset{1}{\wedge}\ a\ b\ \underset{1}{\rightarrow}\ c\ d$
$\overline{a \vee \bar{b}} \wedge c$	$\underset{2}{\wedge}\ \underset{1}{\bar{\vee}}\ a\ \bar{b}$
$\overline{a \vee \bar{b} \sim \overline{\bar{a} \vee b}}$	$\underset{2}{\bar{\sim}}\ \underset{1}{\vee}\ a\ \bar{b}\ \underset{1}{\bar{\vee}}\ \bar{a}\ b.$
$a \vee b \wedge c \wedge d$	$\underset{2}{\wedge}\ \underset{1}{\vee}\ a\ b \mid c\ d$
$a \vee b \vee c \wedge d$	$\underset{2}{\wedge}\ \underset{1}{\vee}\ a\ b\ c \mid d$
$(a \wedge b \wedge c) \vee d$	$\underset{2}{\vee}\ \underset{1}{\wedge}\ a\ b\ c \mid d$
$(a \vee b \wedge c) \vee d \wedge e$	$\underset{4}{\wedge}\ \underset{3}{\vee}\underset{2}{\wedge}\underset{1}{\vee}\ a\ b \mid c \mid d \mid e$

Darstellung der Zeichen:

Jedes einzelne Zeichen zerfällt jetzt in mehrere Komponenten:

1) Die Art des Zeichens
   Variable oder Operationszeichen
   Zwischenraum- bzw. Trennzeichen
2) Die Angabe, ob der Ausdruck pos oder neg zu werten ist.
3a) Bei Variablenzeichen der Index
3b) Bei Operationszeichen die Art des Zeichens und der Rang.

Wir bringen wieder ein Beispiel der Zeichendarstellung durch σ = S1.8 (vgl. S.4)

0	1	2	3	4	5	6	7		
						+	−	Neg	Variable
						+	+	Pos	
			+	−	−	−	−	Neg	∨
			+	−	−	−	+	Pos	
			−	+	−	−	−	Neg	∧
			−	+	−	−	+	Pos	
			+	+	−	−	−	Neg	→
			+	+	−	−	+	Pos	
			−	−	+	−	−	Neg	∾
			−	−	+	−	+	Pos	
			+	−	+	−	−	Neg	∼
			+	−	+	−	+	Pos	
o	o	o	−	−	−	−	−		Zwischenraum
o	o	o	+	+	+	−	−		Trennzeichen

∨, ∧, →, ∾, ∼: Op-Zeichen

Variable: $K_0 - K_5$ = Index

Op-Zeichen: K_0, K_1, K_2 = Rang

K_7 = Negationsangabe

Hiernach lassen sich wieder leicht die entsprechenden Prädikate bilden wie

Neg(x)	Das Zeichen x ist negiert
Va(x)	Das Zeichen x ist eine Variable
Op(x)	Das Zeichen x ist ein Operationszeichen
Opa(x)	Das Zeichen x ist Konj(x) Disj(x)
Zr(x)	Das Zeichen x ist ein Zwischenraumzeichen
Tr(x)	Das Zeichen x ist ein Trennzeichen
Rg(x)	Rang von x. (Falls Op(x)).

5000 1.44

5

Inhaltsverzeichnis von Kapitel 5

Schachtheorie

Schachtheorie, Anlage ~~1~~
Angaben und Konstanten

		Seite
So	Ja-Nein-Wert	
S1.n	n-stellige Folge von Ja-Nein-Werten	
A△1	= $\begin{bmatrix} S1.3 \\ T\triangle 1 \end{bmatrix}$ = Koordinate	1
A△2	= 2xA△1 = Punkt	1
A△3	= $\begin{bmatrix} S1.4 \\ B\triangle 3 \end{bmatrix}$ = Besetztangabe	9
A△4	= (A△2, A△3) = Punktbesetztangabe	12
A△5	= 64xA△3 = Feldbesetzung; C△5 Anfangslage	15
A△6	= $\begin{bmatrix} 64\times A\triangle 4 \\ B\triangle 6 \end{bmatrix}$ = Feldbesetzung mit Punktaufzählung; C△6 Anfangslage	15
A△7	= 12xS1.4 = Anzahlliste der Steine; C△7 Anfangslage	16
A△8	= Qz(C△o.2, A△7) = Anzahlliste mit Benennung der Steine; C△8 Anfangslage	16
A△9	= (A△5, So, S1.4, A△2) = Spielsituation C△9 Anfangssituation	32
A△10	= (A△6, So, S1.4, A△2) = Spielsituation mit Punktzählung C△10 Anfangslage	33
A△11	= (A△2, A△2, So) = Zugangabe	34
A△12	= Erweiterte Zugangabe	34
Weitere Konstanten:		
C△0.1	Wertigkeitstabelle der Steine	11
C△0.2	Steinaufzählung	16

Dipl.-Ing. K. Zuse
Ingenieurbüro
und Apparatebau
Berlin

~~Kap. 5: Schachtheorie~~

I. Geometrie des Schachfeldes.

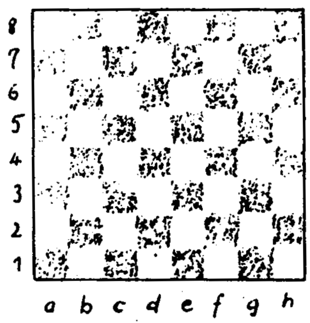
1). Gegebenes System:

Das Spielfeld besteht aus 64 Einzelfeldern. Diese werden im Folgenden als „Punkte" bezeichnet. Die Gesamtheit der 64 Punkte wird als „Feld" bezeichnet.

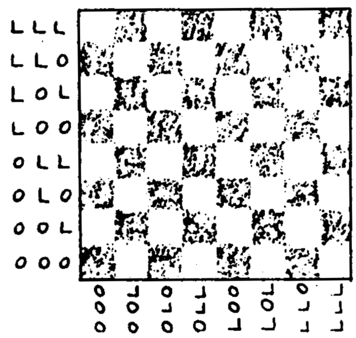
Die Lage jedes Punktes innerhalb des Feldes ist durch zwei Koordinaten gekennzeichnet, welche je 2^3 = 8-fach variabel sind. Die Ortsangabe eines Punktes läßt sich also durch 6 Ja-Nein-Werte bzw. 2 dreistellige ~~Sekundal~~ Dual zahlen darstellen.

Es entsprechen sich dann folgende Bezeichnungen:

Übliche Darstellung:



Koordinaten-Darstellung:



Bei der Koordinatendarstellung wird erst die waagrechte, dann die senkrechte Koordinate angegeben.

Es entsprechen sich dann beispielsweise folgende Punktbezeichnungen:

e2 = LOO, OOL

g6 = LLO, LOL

Es werden zwei neue Strukturzeichen eingeführt:

$A\Delta 1 = \left\{\begin{matrix} S1.3 \\ T\Delta 1 \end{matrix}\right\}$ Koordinate eines Punktes

$A\Delta 2 = 2 \times A\Delta 1$ Ortsbezeichnung eines Punktes.

Zwischen den Koordinaten werden verschiedene Rechen-Operationen gebraucht. Sie entsprechen den Rechenregeln zwischen ~~Sekundal~~-Zahlen.
Dual

```
(V + V , V - V , |V - V|)
 0   1   0   1    0   1
```

2) Aussagen über die Lage eines Punktes:

Randauszug für P△.1 bis P△.3:

```
  | R(V    ) => R
V |   0         0
A |   △.2       0
```

P△.1 „V ist ein weißer Punkt"

```
  | V    ~V     => R△.1
V | 0     0        0
K | 0.0   1.0
S | 0     0        0
```

P△.2 „Diagonalpunkt"

```
  | V    =V    v(θV   ) = V     => R△.2
V | 0     0       0       0         0
K | 0     1       0       1
S | 1.3   1.3     1.3     1.3       0
```

P△.3 „Eckpunkt"

```
  | V   =000 v V   = LLL ∧ V   = 000 v V   = LLL
V | 0          0             0             0
K | 0          0             1             1
S | 1.3        1.3           1.3           1.3
```

3) Einteilung des Feldes in Gebiete:

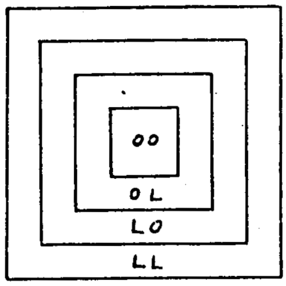
```
  | R(V    ) => R
V |   0         0
A |   △.2       1.2
```

P△.4 Quadrant eines Punktes

```
  | (V   , V   ) => R△.4
V |  0     0        0
K |  0.2   1.2
S |  0     0        1.2
```

OL	LL
OO	LO

P△.5 Zone eines Punktes
Hilfsplan: Ordinatenabstand
von der Mitte




```
  | V   ≥ 4 → V-4  ⇒ R△.5
V | 0        0       0
S | 1.3              1.2

  | V   < 4 → (3-V) ⇒ R△.5
V | 0          0      0
S | 1.3               1.2
```

P△.6

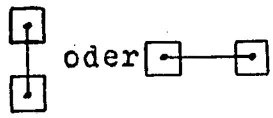
```
  | Min(R△.5(V  ), R△.5(V  )) ⇒ R△.6
V |          0          0       0
K |          0          1
S |          1.3        1.3     1.2
```

4) Aussagen über die Lage zweier Punkte zueinander:

```
  | Ṙ(V  , V  ) ⇒ R
V |   0    1      0
A |  △.2  △.2     0
```

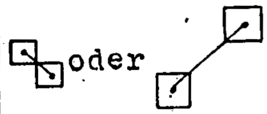
P△.8 Orthogonale Lage

```
  | V    ≠ V    ∧ V    =V    ∨ V    =V    ⇒R△8
V | 0      1      0     1      0     1     0
K |               0     0      1     1
A | △.2    △.2    △.1   △.1    △.1   △.1   0
```

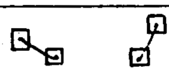


P△.9 Diagonale Lage

```
  | V    ≠ V    ∧|V    -V |  = |V    -V |  ⇒ R△8
V | 0      1      0     1       0     1      0
K |               0     0       1     1
A | △.2    △.2    △.1   △.1     △.1   △.1    0
```



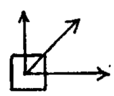
P△.10 Springer-Relation



```
  | (|V - V|= L ∧|V-V| = LO) ∨ (|V-V|= LO ∧|V-V|=L) ⇒ R△.10
V |   0   1      0 1           0 1       0 1        0
K |   0   0      1 1           0 0       1 1
```

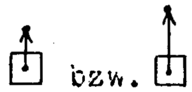
P△.11 Damen-Relation

```
R△.8(V, V) ∨ R△.9(V, V) ⇒ R△.11
     0  1        0  1      0
```



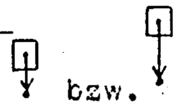
Dipl.-Ing. K. Zuse
Ingenieurbüro
und Apparatebau
Berlin

PΔ.12 Weißer Bauer kann setzen



$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & V & - & V & = 0 \wedge [& V & - & V & = L \vee (& V & = 00L \wedge & V & = 0LL)] = R\Delta.12 \\
V & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & \\
K & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}$$

PΔ.13 Schwarzer Bauer kann setzen

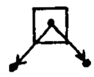


$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & V & - & V & = 0 \wedge [& V & - & V & = L \vee (& V & = LL0 \wedge & V & = L00)] = R\Delta.13 \\
V & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & \\
K & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}$$

PΔ.14 Weißer Bauer kann schlagen

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & \vert V & - & V\vert & = L \wedge (& V & - & V &) = L = R\Delta.14 \\
V & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & \\
K & 0 & & 0 & & 1 & & 1 &
\end{array}$$

PΔ.15 Schwarzer Bauer kann schlagen



$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & \vert V & - & V\vert & = L \wedge (& V & - & V &) = L = R\Delta.15 \\
V & 0 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
K & 0 & & 0 & & 1 & & 0 &
\end{array}$$

PΔ.14 und PΔ.15 berücksichtigen nicht das „en passant-Schlagen".

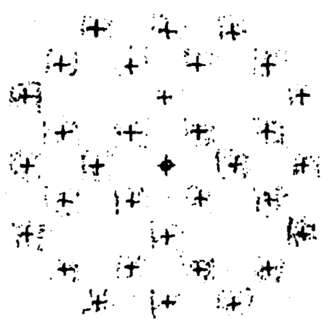
PΔ.16 Keine Setz- oder Schlagbeziehung

$$\begin{array}{ccccccccc}
\overline{R\Delta.10}(& V, & V &) \wedge \overline{R\Delta.11}(& V, & V &) \Rightarrow R\Delta.16 \\
 & 0 & 1 & & 0 & 1 &
\end{array}$$

PΔ.17 Die Punkte sind benachbart

$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & V & \neq & V & \wedge \vert & V & - & V & \vert \leq L \wedge \vert & V & - & V & \vert \leq L \Rightarrow R\Delta.17 \\
V & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & \\
K & & & & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 &
\end{array}$$

PΔ.18 „Es gibt einen Punkt, der zu den beiden gegebenen in Springerrelation steht."



(Gefahrmeldung im Hinblick auf Bedrohung zweier Steine durch Springer)

Impliziter Ansatz:

$$(Ex)\left[R\Delta.10(V_0,\ x) \wedge R\Delta.10(V_1,\ x) \wedge V_0 \neq V_1\right]$$

Explizite Lösung:

$$\begin{array}{l|l} & (V \neq V) \wedge [R\Delta.1(V) \sim R\Delta.1(V)] \wedge \lvert V-V \rvert \leq 4 \wedge \lvert V-V \rvert \leq 4 \\ V & \ \ 0\ \ 1 \qquad\qquad\quad\ 0 \qquad\qquad\quad 1 \qquad\ \ 1\ \ 0 \qquad\qquad 1\ \ 0 \\ K & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ 0\ \ 0 \qquad\qquad 1\ \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \wedge [R\Delta.9(V,\ V) \rightarrow \overline{R8.2}(\lvert V-V \rvert)] \Rightarrow R\Delta.18 \\ \qquad\qquad\quad 0 \quad\ 1 \qquad\qquad\qquad\quad 1\ \ 0 \end{array}$$

„V_0 und V_1 sind verschiedene Punkte von gleicher Farbe ($R\Delta.1$) und sowohl die Horizontal- als auch die Vertikaldifferenz der Koordinaten ist absolut genommen kleiner oder gleich 4, und für den Fall, daß die Punkte diagonal zueinander liegen, darf die Koordinatendifferenz keine gerade Zahl sein (R8.2)."

PΔ.19 Es gibt Punkte, die zwischen den beiden gegebenen liegen:

$$R\Delta.11(V_0,\ V_1) \wedge \overline{R\Delta.17}(V_0,\ V_1) \Rightarrow R\Delta.19$$

Die Punkte liegen orthogonal oder diagonal zueinander und sind nicht benachbart.

5) <u>Aussagen über die Lage dreier Punkte zueinander:</u>

$$\begin{array}{l|l} & R(V \quad , V \quad , V \quad) \Rightarrow R \\ V & \quad 0 \qquad\ \ 1 \qquad\ \ 2 \qquad\quad 0 \\ A & \ \ \Delta.2 \quad \Delta.2 \quad \Delta.2 \qquad 0 \end{array}$$

Beschränkung: $V_0 \neq V_1 \wedge V_0 \neq V_2 \wedge V_2 \neq V_3$

(Alle Punkte sind voneinander verschieden.)

PΔ.24 Alle drei Punkte liegen auf einer Waagrechten

$$\begin{array}{l|l} & V = V \wedge V = V \Rightarrow R\Delta.24 \\ V & 0 \quad\ 1 \quad 0 \quad\ 2 \\ K & 1 \quad\ 1 \quad 1 \quad\ 1 \end{array}$$

PΔ.25 Alle drei Punkte liegen auf einer Senkrechten

$$\begin{array}{l|l} & V = V \wedge V = V \Rightarrow R\Delta.25 \\ V & 0 \quad\ 1 \quad 0 \quad\ 2 \\ K & 0 \quad\ 0 \quad 0 \quad\ 0 \end{array}$$

P△.26 Sie liegen auf der gleichen Orthogonalen

$$R\Delta.24(V_0, V_1, V_2) \vee R\Delta.25(V_0, V_1, V_2) \Rightarrow R\Delta.26$$

P△.27 Sie liegen auf der gleichen Diagonalen

$$R\Delta.9(V_0, V_1) \bar{\wedge} R\Delta.9(V_0, V_2)$$

$$\wedge \left[\left(Pos(V_{\substack{1\\0}} - V_{\substack{0\\0}}) \sim Pos(V_{\substack{1\\1}} - V_{\substack{0\\1}})\right) \sim \left(Pos(V_{\substack{2\\0}} - V_{\substack{0\\0}}) \sim Pos(V_{\substack{2\\1}} - V_{\substack{0\\1}})\right)\right] \Rightarrow R\Delta.27$$

(obere Indexzeile: V, untere Indexzeile: K)

P△.28 Sie liegen auf einer Geraden

$$R\Delta.26(V_0, V_1, V_2) \vee R\Delta.27(V_0, V_1, V_2) \Rightarrow Ger(V_0, V_1, V_2)$$

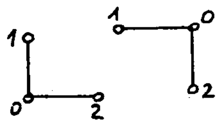
P△.29 V_0 liegt zwischen V_1 und V_2

$$R\Delta.28(V_0,V_1,V_2) \wedge \left[Pos(V_{\substack{1\\0}} - V_{\substack{0\\0}}) \sim Pos(V_{\substack{2\\0}} - V_{\substack{1\\0}})\right] \vee \left[Pos(V_{\substack{1\\1}} - V_{\substack{0\\1}}) \sim Pos(V_{\substack{2\\1}} - V_{\substack{1\\1}})\right]$$

$$\Rightarrow R\Delta.29$$

P△.30 V_0, V_1, V_2 liegen rechtwinklig zueinander

V_0 im Scheitel



$$\left[(V_{\substack{0\\0}} = V_{\substack{1\\0}}) \wedge (V_{\substack{0\\1}} = V_{\substack{2\\1}})\right] \vee \left[(V_{\substack{0\\0}} = V_{\substack{2\\0}}) \wedge (V_{\substack{0\\1}} = V_{\substack{1\\1}})\right] \Rightarrow R\Delta.30$$

6) Bildung von Punktmengen:

P Δ .32 — Liste der Punkte, die zwischen den Punkten V_0 und V_1 liegen.

```
 | R(V    ,V    ) ⇒ R
V|   o     1        o
K|   Δ .2  Δ .2     □×Δ.2
```

Impliziter Ansatz:

```
 | x̂   [RΔ.29(x    ,V    ,V    )] ⇒ RΔ.32
V|                  o     1
A| Δ.2         Δ.2  Δ.2   Δ.2       □×Δ.2
```

P Δ .32.1 — Unterplan zu P Δ .32

Liste der Koordinaten, die zwischen zwei gegebenen liegen:

```
 | R(V   , V   ) ⇒RΔ.32.1
V|   o     1      o
S|   1.3   1.3    □×1.3
```

```
 | V    ≥ V    ⇒ z | z → (+ ⇒ δ) | z̄ → (- ⇒ δ)
V| 1      o      o | o           | o
S| 1.3    1.3    o |             |
```

```
 | V    δ 1 ⇒ z    | W[z     ≠ V    → | z     ⇒ μR | z    δ 1 ⇒ z   ]
V| o          1    |  1        1      | 1        o  | o          o
S| 1.3        1.3  |  1.3      1.3    | 1.3         | 1.3        1.3
```

P Δ .32 — Explizite Form (Impliziter Ansatz siehe oben):

```
 | ‾V    =  V‾   ⇒ z | ‾V    =  V‾   ⇒ z
V|  o       1      o |  o       1      1
K|  o       o        |  1       1
S|  1.3     1.3    o |  1.3     1.3    o
```

```
 | z →[RΔ.32.1(V    ,V   )⇒z      ] | z →[RΔ.32.1(V    ,V   ) ⇒ z      ]
V| o  o         o     1     2        | 1  o         o     1       3
K|              o     o              |              1     1
S| o            1.3   1.3   □×1.3    | o            1.3   1.3     □×1.3
```

```
 | z ∧ z →[Qz(z     ,z     ) ⇒ R     ]
V| o   1       2     3         1
S| o   o       □×1.3 □×1.3     □×Δ.2
```

```
 | z ∧ z̄ →[Qz(V    ,z     ) ⇒ R     ] | z̄ ∧ z →[Qz(z     ,V   )⇒R    ]
V| o   1       o     3         1      | o   1       2      o      1
K|             o                      |                    1
S| o   o       1.3   □×1.3     □×Δ.2  | o   o       □×1.3  1.3    □×□.2
```

P Δ.34 Liste der Punkte, die zu einem gegebenen Punkt in Springerrelation stehen.

Implizites Ansatz:

```
V|  x̂   [R Δ.10(V  ,  x  )] |
  |              o             |
A|  Δ.2         Δ.2   Δ.2      |
```

Explizite Form: (konstruktive Methode mit Variation von Parametern)

```
V| 0 ⇒ z
 |     1
S|     1.3

W[  | z →[LO ⇒ z   |OL ⇒ z  ]|| z̄ →[OL ⇒ z   |LO ⇒ z  ]
  V | 1         2  |       3  || 1         2  |       3
  K | o            |          || o            |
  S | o       1.2  |     1.2  || o       1.2  |     1.2 ]

    | z →(+ ⇒ ở) | z̄ →(- ⇒ ở)
  V | 1       1  | 1       1
  K | 1          | 1
  S | o          | o

    | z →(+ ⇒ ở) | z̄ →(- ⇒ ở)
  V | 1       2  | 1       2
  K | 2          | 2
  S | o          | o

    | V    ở  z    ⇒ z   | V    ở  z    ⇒ z
  V | o    1  2      4   | o    2  3      5
  K | o                  | 1
  S | 1.3    1.2   1.4   | 1.3    1.2   1.4

    | (z  ≥ 0 ∧ z  < LOOO ∧ z  ≥ 0 ∧ z  < LOOO) ⇒ z
  V |  4        4           5        5           6
  S |  1.4      1.4         1.4      1.4         o

    | z →[(z, z, z) ⇒ μR  | (z, z, z) ⇒ R  ]
  V | 6    4  4  4     o  |  5  5  5    o
  K |      o  1  2     o  |  o  1  2    1
  S | o    o  o  o   1.3  |  o  o  o  1.3 ]

      z = LLL ⇒ Fin²          z + 1 ⇒ z
      1                       1       1          ]
```

Bedeutung der Zwischenwerte:

z_1 = Hilfswert zur Variation der ~~Felder~~ Punkte

z_2 = waagrechter Abstand zwischen V_0 und dem nächsten Punkt

z_3 = senkrechter Abstand zwischen V_0 und dem nächsten Punkt

z_4, z_5 = Koordinaten des Punktes

z_6 = „Der nächste Punkt liegt innerhalb des Spielfeldes"

Die entsprechenden Punktmengen für die anderen Steinrelationen können in gleicher Weise gebildet werden.
Für das folgende genügen zunächst die impliziten Ansätze.

II. Die Punkt-Besetzung

Die Punkte (Einzelfelder) des Schachfeldes können mit Steinen besetzt werden. Zu diesem Zweck wird die Punktangabe durch eine Besetzungsangabe ergänzt.

Wir haben 6 Steinsorten (B, S, L, T, D, K) je in weiß und schwarz. Ferner kann der Punkt unbesetzt sein. Diese 13 Möglichkeiten des „Punktzustandes" lassen sich mit 4 Ja-Nein-Werten darstellen.

1) Einführung der Besetztangabe:

$$A\triangle 3 = \text{Besetztangabe} = \begin{cases} S1.4 \\ B\triangle 3 \end{cases}$$

Die Zuordnung wird durch eine Liste gegeben.

0	1	2	3	Bedeutung
−	−	−	−	frei
+	−	−	−	W.B.
−	+	−	−	W.S.
[+	+	−	−	−]
−	−	+	−	W.K.
+	−	+	−	W.T.
−	+	+	−	W.L.
+	+	+	−	W.D.
[−	−	−	+	−]
+	−	−	+	S.B.
−	+	−	+	S.S.
[+	+	−	+	−]
−	−	+	+	S.K.
+	−	+	+	S.T.
−	+	+	+	S.L.
+	+	+	+	S.D.

Nicht definierte Fälle sind ausgeschlossen, dementsprechend ergibt sich:

$$B\triangle 3 = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ - & - & - & - \\ + & - & - & - \\ - & + & - & - \\ - & - & + & - \\ + & - & + & - \\ - & + & + & - \\ + & + & + & - \\ + & - & - & + \\ - & + & - & + \\ - & - & + & + \\ + & - & + & + \\ - & + & + & + \\ + & + & + & + \end{array}\right|$$

2) Operationen mit Besetztangaben $A\triangle 3$:

Aus den Komponenten der Besetztangabe $\underset{o}{V}$ können eine Reihe von Aussagen abgeleitet werden:

$\underset{o}{V} \neq 0$ „Besetzt"

$$\begin{array}{c|llll} & V & \neq 0 & \wedge & \overline{V} \\ V & o & & & o \\ K & & & & 3 \end{array}$$ „durch Weiß besetzt"

```
  | V      „durch Schwarz besetzt"
V | o
K | 3

    V  =  + - - o   „durch Bauer besetzt"
    V  =  - + - o      "   Springer   "
    V  =  + - + o      "   Turm       "
    V  =  - + + o      "   Läufer     "
    V  =  + + + o      "   Dame       "
    V  =  - - + o      "   König      "
```

P△.48 „Die Nachbarfelder sind beherrscht"

```
  | V ∧ (V ∼ V) ⇒ R △.48
V | o    o   o
K | 2    o   1
S | o    o   o     o
```

P△.49 „Die Orthogonalen sind beherrscht"

```
  | V ∧ V ⇒ R △.49
V | o   o
K | o   2
```

P△.50 „Die Diagonalen sind beherrscht"

```
  | V ∧ V ⇒ R △.50
V | o   o
K | o   2
```

P△.51 „Mit einem leichten Offizier besetzt" (Läufer oder Turm)
Springer

```
  | V̄ ∧ V ⇒ R △.51
V | o   o
K | o   1
```

P△.52 „Mit einem schweren Offizier besetzt" (Dame, Turm)

```
  | V ∧ V ⇒ R △.52
V | o   o
K | o   2
```

P△.53 „Mit einem Offizier besetzt" (einschließlich König)

```
  | V  ⇒  R △.53
V | o
K | 2
```

P△.54 „Mit einem Offizier ausschließlich König besetzt"

```
  | V ∧ V ∨ V ⇒ R △.54
V | o   o   o
K | 2   o   1
```

Beziehungen zwischen zwei Besetztangaben:

$$\begin{array}{c|cccc} & R(V & , V &) & \Rightarrow R \\ V & 0 & 1 & & 0 \\ A & \Delta 3 & \Delta 3 & & 0 \end{array}$$

PΔ.60 „Mit Steinen gleicher Farbe besetzt"

$$\begin{array}{c|ccccccc} & V & \neq 0 \wedge & V & \neq 0 \wedge (& V & \sim & V) \Rightarrow R\Delta.60 \\ V & 0 & & 1 & & 0 & & 1 \\ K & & & & & 3 & & 3 \end{array}$$

PΔ.61 „Mit Steinen verschiedener Farbe besetzt"

$$\begin{array}{c|ccccccc} & V & \neq 0 \wedge & V & \neq 0 \wedge (& V & \nsim & V) \Rightarrow R\Delta.61 \\ V & 0 & & 1 & & 0 & & 1 \\ K & & & & & 3 & & 3 \end{array}$$

PΔ.62 „Bei gleicher Bewertung von Springer und Läufer ist die Besetzung gleichwertig"

(O, B, (S, L), T, D, K)

$$\begin{array}{c|cccccccccc} & [(V, & V, & V) & = (V, & V, & V)] \vee [R\Delta.51(V) & \wedge & R\Delta.51(V)] & \Rightarrow R\Delta.62 \\ V & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & & 1 & \\ K & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & & & & \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta 3 & & \Delta 3 & 0 \end{array}$$

Andere Darstellung von PΔ.62

Einführung einer Wertigkeitszuordnung in Form einer Konstanten CΔ0.1

Komp von AΔ3	0,1,2	Stein	Wertigkeitsstufe	CΔ0.1
	− − −	O	0	OOO
	+ − −	B	1	OOL
	− + −	S	2	OLO
	+ + −	−		OOC
	− − +	K	5	LOL
	+ − +	T	3	OLL
	− + +	L	2	OLO
	+ + +	D	4	LOO

PΔ.62

$$\begin{array}{c|cccc} & (C & (V,V,V)) = & (C & (V,V,V)) \Rightarrow R\Delta.62 \\ V & \Delta 0.1 & 0\ 0\ 0 & \Delta 0.1 & 1\ 1\ 1 \\ K & \circ & 0\ 1\ 2 & \circ & 0\ 1\ 2 \\ S & 1.3 & 0\ 0\ 0 & 1.3 & 0\ 0\ 0 \end{array}$$

PΔ.63 „V ist eindeutig stärker besetzt als V "

```
 1                                         0

  | KΔ.1 ┌─(V,V,V) < KΔ.1(V,V,V) ⇒ RΔ.63
V |      │  0 0 0       1 1 1       0
K | o────┘  0 1 2       0 1 2
S | 1.3     0 0 0       0 0 0       0
```

3) Die Punktbesetztangabe:

AΔ4 = (AΔ2, AΔ3)

Operationen mit Punkt-Besetzt-Angabe:

```
  | R(V   ) ⇒ R
V |   0       0
A |   Δ4      0
```

PΔ.64 „Die Besetzung ist möglich"

```
  | [(V  = +---) → V̄  = 0] ∧ [(V  = +--+) → V̄  = LLL] ⇒ RΔ.64
V |   0            0            0            0
K |   0.1          1.0          0.1    ,     1.0
A |   Δ3           Δ1           Δ3           Δ1            0
```

(Ein weißer Bauer darf nicht auf den ~~Feldern~~ Randfeldern mit der Vertikalkoordinate 0 stehen und ein schwarzer Bauer nicht auf Feldern mit der Vertikalkoordinate 7 stehen). Randfeldern

Beziehungen zwischen zwei Punkt-Besetzt-Angaben:

```
  | R(V  , V  ) => R
V |   o    1       o
A |   Δ4   Δ4      o
```

P Δ.72 Besetzungs-Bedingung für Zug $V_o - V_1$
(V_o ist besetzt und V_1 ist vom Gegner besetzt oder frei)

```
  | V   ≠ 0 ∧ (V   = 0 ∨ (V   ∿ V  )) => R Δ.72
V | o           1          o     1         o
K | 1           1          1.3   1.3
A | Δ3          Δ3         o     o         o
```

P Δ.73 Setz-Bedingung ohne Berücksichtigung der dazwischen-liegenden Punkte:

```
  | V  = 0 ∧ [ [V   = +--- ∧ RΔ12(V , V )] ] => RΔ.73   WB
V | 1           o                  o   1
K | 1           1                  o   o
A | Δ3          1.3                Δ2  Δ2

  |             [V   = +--+ ∧ RΔ13(V , V )]              SB
V |              o                 o   1
K |              1                 o   o
A |              1.3               Δ2  Δ2

  |             [V   = -+-o ∧ RΔ10(V , V )]              S
V |              o                 o   1
K |              1                 o   o
A |              1.3               Δ2  Δ2

  |             [V   = --+o ∧ RΔ17(V , V )]              K
V |              o                 o   1
K |              1                 o   o
A |              1.3               Δ2  Δ2

  |             [RΔ49(V ) ∧ RΔ8(V , V )]                 TD
V |                   o         o   1
K |                   1         o   o
A |                   1.3       Δ2  Δ2

  |             [RΔ50(V ) ∧ RΔ9(V , V )]                 LD
V |                   o         o   1
K |                   1         o   o
A |                   1.3       Δ2  Δ2  ]
```

PΔ.74 Schlag- bzw. Deckbedingung ohne Berücksichtigung der dazwischenliegenden Punkte:

$$\begin{array}{l|llll}
 & V & = +{-}{-}{-} \wedge R\Delta 14(& V\ , & V\ ) \\
V & 0 & & 0 & 1 \\
K & 1 & & 0 & 0 \\
A & \Delta 3 & & \Delta 2 & \Delta 2
\end{array} \quad \Rightarrow R\Delta .74 \qquad WB$$

$$\begin{array}{l|llll}
 & V & = +{-}{-}+ \wedge R\Delta 15(& V\ , & V\ ) \\
V & 0 & & 0 & 1 \\
K & 1 & & 0 & 0 \\
A & \Delta 3 & & \Delta 2 & \Delta 2
\end{array} \qquad SB$$

$$\begin{array}{l|llll}
 & V & = -+-0 \wedge R\Delta 16(& V\ , & V\ ) \\
V & 0 & & 0 & 1 \\
K & 1 & & 0 & 0 \\
A & \Delta 3 & & \Delta 2 & \Delta 2
\end{array} \qquad S$$

$$\begin{array}{l|llll}
 & V & = {-}{-}+0 \wedge R\Delta 17(& V\ , & V\ ) \\
V & 0 & & 0 & 1 \\
K & 1 & & 0 & 0 \\
A & \Delta 3 & & \Delta 2 & \Delta 2
\end{array} \qquad K$$

$$\begin{array}{l|llll}
 & R\Delta 49(& V\ ) \wedge R\Delta 8(& V\ , & V\ ) \\
V & & 0 & 0 & 1 \\
K & & 1 & 0 & 0 \\
A & & 1.3 & \Delta 2 & \Delta 2
\end{array} \qquad TD$$

$$\begin{array}{l|llll}
 & R\Delta 50(& V\ ) \wedge R\Delta 9(& V\ , & V\ ) \\
V & & 0 & 0 & 1 \\
K & & 1 & 0 & 0 \\
A & & 1.3 & \Delta 2 & \Delta 2
\end{array} \qquad LD$$

PΔ.75 En-passant-Schlagen:

V_0 = Punkt des Bauern
V_1 = Punkt, nach dem der Bauer setzt
V_2 = Punkt, auf dem der geschlagene Stein steht

$$\begin{array}{l|lllll}
 & R(V\ , & V\ , & V\ ) & \Rightarrow & R\Delta .75 \\
V & 0 & 1 & 2 & & 0 \\
K & \Delta 4 & \Delta 4 & \Delta 4 & & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|llllll}
 & [V = +{-}{-}{-} \wedge & V = 00L \wedge & V = 0LL \wedge R\Delta 14(& V\ , & V\ ) \wedge & V\ ] \\
V & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\
K & 1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 1.3 \\
A & \Delta 3 & \Delta 1 & \Delta 1 & \Delta 2 & \Delta 2 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|lllllll}
 & \vee [V = +{-}{-}+ \wedge & V = 0LL \wedge & V = L00 \wedge R\Delta 15(& V\ , & V\ ) \wedge & V \neq 0 \wedge & \overline{V}\ ] \\
V & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\
K & 1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 1 & 1.3 \\
A & \Delta 3 & \Delta 1 & \Delta 1 & \Delta 2 & \Delta 2 & \Delta 3 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|lllll}
 & \wedge (V = & V\ ) \wedge & (V = 0) & \Rightarrow & R\Delta .75 \\
V & 0 & 1 & 1 & & \\
K & 0.0 & 0.0 & 1 & & \\
A & \Delta 1 & \Delta 1 & \Delta 2 & & 0
\end{array}$$

III. Die Feldbesetzung.

1) Einführung neuer Angaben:

Die Liste der Besetzt-Angaben $A\triangle 4$, die den 64 Punkten des Schachfeldes zugeordnet sind, ergibt die Feldbesetzung.

$$A\triangle 5 = 64 \times A\triangle 3$$

Es empfiehlt sich, eine erweiterte Angabe einzuführen, welche in der Ergänzung der Feldbesetzung durch die Punktbezeichnungen besteht.

Die Paarliste dieser Punkt-Besetzt-Angaben ist von beschränkter Variabilität, da die Spalte 0 eine Konstante ist.

$$A\triangle 6 = \begin{bmatrix} 64 \times A\triangle 4 \\ B\triangle 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|lll} & V & = i & \Rightarrow B\triangle 6 \\ K & i.o & & \\ A & \triangle 2 & 1.0 & \end{array}$$

Andere Formulierung:

$$A\triangle 6 = Qz(\hat{}A\triangle 2,\ A\triangle 5)$$

Die Anfangslage wird durch die Konstanten

C△5 ; (A△5) und
C△6 ; (A△6) gekennzeichnet.

C△6			Bedeutung	
^A△2		C△5	Punkt	Stein
− − −	− − −	+ − + −	a1	WT
+ − −	− − −	− + − −	b1	WS
− + −	− − −	− + + −	c1	WL
+ + −	− − −	+ + + −	d1	WD
− − +	− − −	− − + −	e1	WK
+ − +	− − −	− + + −	f1	WL
− + +	− − −	− + − −	g1	WS
+ + +	− − −	+ − + −	h1	WT
− − −	+ − −	+ − − −	a2	WB
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
+ + +	+ − −	+ − − −	h2	WB
− − −	− + −	− − − −	a3	−
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
+ + +	+ + +	+ − + +	h8	ST

Für bestimmte Aufgaben interessiert nicht die Gesamtfeldbesetzung, sondern nur die Zahl der von jeder Steinsorte vorhandenen Steine.

Wir brauchen zunächst eine Konstante C △ 0.2, welche in der Aufzählung der verschiedenen Steinsorten besteht.

							Bedeutung
	C	=	+	−	−	−	WB
V	△ 0.2		−	+	−	−	WS
A	12×A △ 3		−	+	+	−	WL
			+	−	+	−	WT
			+	+	+	−	WD
			−	−	+	−	WK
			+	−	−	+	SB
			−	+	−	+	SS
			−	+	+	+	SL
			+	−	+	+	ST
			+	+	+	+	SD
			−	−	+	+	SK

Dieser Liste läßt sich durch Querzusammensetzung eine Liste A △ 7 zuordnen:

A △ 7 = 12×S1.4

Die Querzusammensetzung mit C △ 0.2 ergibt die Paarliste A △ 8.

A △ 8 = Qz(C △ 0.2, A △ 7)

Der <u>Anfangssituation</u> sind die Konstanten C △ 7 und C △ 8 zugeordnet.

C △ 8					Bedeutung	
C △ 0.2				C △ 7		
0	1	2	3	3210	Stein	Zahl
+	−	−	−	LOOO	WB	8
−	+	−	−	OOLO	WS	2
−	+	+	−	OOLO	WL	2
+	−	+	−	OOLO	WT	2
+	+	+	−	OOOL	WD	1
−	−	+	−	OOOL	WK	1
+	−	−	+	LOOO	SB	8
−	+	−	+	OOLO	SS	2
−	+	+	+	OOLO	SL	2
+	−	+	+	OOLO	ST	2
+	+	+	+	OOOL	SD	1
−	−	+	+	OOOL	SK	1

5000 1.44

2) Operationen mit A△7:

P△.96 Entwicklung von A△7 aus A△5

```
  | R(V   ) ⇒ R
V |   o      o
A |   △5     △7

  | iW [ N[x̂(x   ∈ V    ∧ x = C      )] ⇒ R ]
V |                o            △0.2      o
K |                             1         1
A |          △3    △5           △3        1.4
```

Aussagen über A△7.

```
  | R(V   ) ⇒ R
V |   o       o
A |   △7      o
```

P△.97 Das Feld ist voll besetzt: (V = C) ⇒ R△.97

```
 (V = C   ) ⇒ R△.97
  o   △7      o
```

P△.98 Die Besetzung ist eine Teilbesetzung der Ausgangsbesetzung oder ihr gleich.

```
  | △ iW [V    ≤ C  ] ⇒ R△.98
V |       o     △7      o
K |       1     1
S |       1.4   1.4     o
```

P△.99 Zahl der weißen und der schwarzen Steine:

```
  | R(V   ) ⇒ (R  , R  )     R  = Zahl der weißen Steine
V |   o         o    1        o
A |   △7        1.5  1.5     R  = Zahl der schwarzen Steine
                              1

  | V + V + V + V + V ⇒ R△.99 | V + V + V + V + V ⇒ R△.99
V | o   o   o   o   o   o     | o   o   o   o   o   1
K | o   1   2   3   4         | 6   7   8   9   10
```

P△.100 Zahl der überzähligen Offiziere (gegenüber Ausgangslage):

```
  | R(V   ) ⇒ (R  , R  )     R  = überzählige weiße Offiziere
V |   o         o    1        o
A |   △7        1.4  1.4     R  = überzählige schw. Offiziere
                              1

Fpos(V-Lo)+Fpos(V-Lo)+Fpos(V-Lo)+Fpos(V-L) ⇒ R△.100
     o          o          o          o      o
     1          2          3          4

Fpos(V-Lo)+Fpos(V-Lo)+Fpos(V-Lo)+Fpos(V-L) ⇒ R△.100
     o          o          o          o      1
     7          8          9          4
```

P△.101 „Die Besetzung ist unter Berücksichtigung des Bauernaustauschs möglich"

Einzelbedingungen:

1) Beide Könige vorhanden
2) Summe der weißen Steine ≤ 16
3) Summe der schwarzen Steine ≤ 16
4) Zahl der weißen Bauern ≤ 8 minus Zahl der überzähligen weißen Offiziere
5) Zahl der schwarzen Bauern ≤ 8 minus Zahl der überzähligen schwarzen Offiziere
6) Zahl der Steine mindestens gleich 3.

```
  | R(V    ) ⇒ R△.101
V |   0         0
A |   △7        0
```

```
  | (V=L) ∧ (V=L) ∧ (R△.99(V) ≤ L0000) ∧ (R△.99(V) ≤ L0000)
V |  0       0        0      0                1      0
K |  5       11

  | ∧ (V ≤ L000 - R△.100(V)) ∧ (V ≤ L000 - R△.100(V))
V |    0            0     0      0           1     0
K |    0                         6

  | ∧ R△.99(V) + R△.99(V) ≥ LL  ⇒ R△.101
V |   0      0     1     0          0
K |
```

P△.102 Weiß ist Schwarz in jeder Steinklasse gleich oder überlegen:

```
  | R(V    ) ⇒ R△.102
V |   0         0
A |   △7        0
```

```
(V ≥ V) ∧ (V ≥ V) ∧ (V ≥ V) ∧ (V ≥ V) ∧ (V ≥ V ) ∧ (V ≥ V) ⇒ R△.10
 0   0     0   0     0   0     0   0     0   0      0   0       0
 0   6     1   7     2   8     3   9     4   10     5   11
```

P△.103 Entsprechend für Schwarz.

P△.104 Eindeutige Überlegenheit von Weiß entsprechend der Wertestufung der Steine gemäß P△.62 .

Da stets nur je ein König vorhanden ist, interessieren nur die 5 anderen Steine!

B, S, L, T, D.

Diese sind in vier Wertklassen eingeteilt:

B	a
S,L	b
T	c
D	d

Über die Werte a, b, c, d ist lediglich folgendes festgesetzt:

$$a > 0$$
$$b-a > 0$$
$$c-b > 0$$
$$d-c > 0$$

An Hand dieser Festsetzung kann in einigen Fällen eine Überlegenheit festgestellt werden.

Sind α, β, γ, δ die Überschüsse (bzw. Unterbilanzen) von Weiß in den Steinklassen a, b, c, d , so gilt für die Wertigkeit x von Weiß folgendes:

$$x = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \delta \cdot d$$

$$\begin{aligned} x = {} & \alpha \cdot a \\ & + \beta \cdot a + \beta \cdot (b-a) \\ & + \gamma \cdot a + \gamma \cdot (b-a) + \gamma \cdot (c-b) \\ & + \delta \cdot a + \delta \cdot (b-a) + \delta \cdot (c-b) + \delta \cdot (d-c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = {} & (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\, a \\ & + (\beta + \gamma + \delta)\,(b-a) \\ & + (\gamma + \delta)\,(c-b) \\ & + \delta\,(d-c) \end{aligned}$$

Soll $x > 0$ sein, so muß wenigstens einer der folgenden Faktoren positiv und es darf keiner negativ sein:

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$
$$(\beta + \gamma + \delta)$$
$$(\gamma + \delta)$$
$$\delta$$

Dementsprechend ergibt sich der Rechenplan wie folgt:

```
P△.104 |   | R(V   ) ⇒ R△.104
       | V |   0        0
       | A |   △7       0
       |
       |   | V - V  ⇒ z          | z < 0 ⇒ Fin | z > 0 ⇒  vR
       | V | 0   0    0          | 0           | 0         0
       | K | 4   10              |             |
       |
       |   | z + V - V ⇒ z       | z < 0 ⇒ Fin | z > 0 ⇒  vR
       | V | 0   0   0   0       | 0           | 0         0
       | K |     3   9           |             |
       |
       |   | z + V + V - V - V ⇒ z | z < 0 ⇒ Fin | z > 0 ⇒  vR
       | V | 0   0   0   0   0   0 | 0           | 0         0
       | K |     1   2   7   8     |             |
       |
       |   | z + V - V ⇒ z       | z < 0 ⇒ Fin | z > 0 ⇒  vR
       | V | 0   0   0   0       | 0           | 0         0
       | K |     0   6           |             |
-------+------------------------------------------------------------
P△.105 | Entsprechend für Schwarz
       | Vertauschung von:  V, V | V, V | V, V | V, V | V, V  | V, V
       |                    0  0 | 0  0 | 0  0 | 0  0 | 0  0  | 0  0
       |                    0  6 | 1  7 | 2  8 | 3  9 | 4  10 | 5  11
```

3) Operationen mit der Feldbesetzung (A△5 bzw. A△6):

Die nachfolgenden Rechenpläne enthalten mitunter Wiederholungen und implizite Teilausdrücke, stellen also nicht immer die rechnerisch günstigste Lösung dar.

```
P△.128 | „Der Zug von V  nach V  ist erlaubt."
       |               1        2
       |   | R(V   , V   , V   ) ⇒ R△.128
       | V |   0     1     2        0
       | A |   △5    △2    △2       0
       |
       |   | (V   , V ┌ V   ) ⇒ z  | (V   , V ┌  V   ) ⇒ z  |
       | V |  1     0 │  1       0  |  1     0 │   1       1  |
       | K |          └             |          └              |
       | A |  △2    △3   △2      △4 |  △2    △3    △2      △4 |
       |
       |   | R△.73(z   , z   ) v (R△.74(z   , z   ) ∧ (z ≠ z  ))
       | V |        0    1              0     1        1   0
       | K |                                           1.3 1.3
       | A |        △4   △4             △4    △4       0   0
       |
       |   |   ∧[R△19(z ,z ) → (x)(x ∈ R△32(z ,z ) → V = 0)]  ⇒R△128
       | V |          0  1                 0  1     0
       | K |          0  0                 0  0     x
       | A |          △2 △2                △2 △2    △5
```

V_o = Feldbesetzung (A△5)

V_1 = Punkt, von dem aus gezogen wird (A△2)

V_2 = Punkt, nach dem gezogen wird (A△2)

z_o = Die V_1 zugeordnete Punktbesetztangabe (A△4)

z_1 = Die V_2 zugeordnete Punktbesetztangabe (A△4)

x = Zwischen V_1 und V_2 liegender Punkt (A△2)

Es gibt zwischen V_1 und V_2 entweder die Setzbeziehung R△.73 oder, falls V_1 und V_2 mit Steinen verschiedener Farbe besetzt sind (~~$z_{1/1.3} \nsim z_{0/1.3}$~~) die Schlagbeziehung R△.74 und, falls es zwischen V_0 und V_1 liegende Punkte gibt (R△.19), so müssen diese (R△.32) unbesetzt sein (V_{o_x} = 0).

P△.128 berücksichtigt nicht die Rochade, da diese aus der Feldbesetzung allein noch nicht kontrolliert werden kann.

P△.129 „Der auf V_1 stehende Stein deckt den Punkt V_2 bzw. greift ihn an." (Er kann, falls auf V_2 ein gegnerischer Stein steht, diesen schlagen.)

Wie P△.128, jedoch tritt an Stelle des

```
Gliedes   R△.73(z , z) ∨ (R△.74(z , z) ∧ (z   ≠ z  ))
                o   1           o   1     o     1
                                          1.3   1.3
```

```
das Glied  R△.74(z, z)
                 o  1
```

P△.130 „Es gibt einen weißen Stein, der bedingt nach V_1 gesetzt werden kann." (Ev. wegen Schachaufdeckung gebunden.)

```
  | R(V  , V  ) ⇒ R
V |   o    1      o
K |   △6   △2     o

  | (Ex)[x ∈ V ∧ x  ≠ 0∧x̄   ∧R△128(Sp1(V),x ,V )] ⇒ R△.130
V |          o                         o     1       o
K |              1    1.3                 o
A |  △4      △6 △3    o           △5      △2 △2      o
```

P△.131

Wie P△.130 , jedoch für Schwarz.

```
K | x        an Stelle von    x ≠ 0 ∧ x̄
  | 1.3                               1.3
```

P△.132

„Der Punkt V_1 ist durch Weiß bedingt gedeckt bzw. angegriffen." (ev. durch Schachaufdeckung gebunden.)

Wie P△.130 , jedoch R△.129 an Stelle von R△.128.

P△.133

Wie P△.132 , jedoch für Schwarz.

```
K | x        an Stelle von    x ≠ 0 ∧ x̄
  | 1.3                               1.3
```

Falls V_1 durch Schwarz besetzt ist, ist R△.130 ∼ R△.132

Falls V_1 durch Weiß besetzt ist, ist R△.131 ∼ R△.133 .

Desgleichen falls V_1 durch Offizier besetzt ist.

P△.134

„Dem weißen König ist Schach geboten."

```
  | R(V    ) ⇒ R△.134       Voraussetzung: Besetzung ent-
V |   0        0                           spricht P△.101
A |   △6       0
```

```
  | x́  [x ∈ V   ∧ x = (--+-)] ⇒ z  | R△133(V , z )⇒R△134
V |         0                   0  |         0   0
K |                 1              |             0
A | △4      △6                  △4 |         △6  △2   0
```

P△.135

„Dem schwarzen König ist Schach geboten."

Wie P△.134, jedoch   x ≐ (--++)

und   P△.132 an Stelle von P△.133

P△.136

Das Spielfeld V_0 wird durch den Zug $V_1 - V_2$ in das Spielfeld R_0 verwandelt.

(Es wird vorausgesetzt, daß der Zug $V_1 - V_2$ erlaubt ist.)

```
  | R(V  , V  , V  ) ⇒ R△.136
V |   0    1    2        0
A |   △6   △2   △2       △6
```

```
  | V  ⇒ z  | z ┌ V.1 ⇒ z ┌ V.1 | 0 ⇒ z ┌ V.1 | z  ⇒ R△.136
V | 0    0  | 0 │ 1     0 │ 2   |     0 │ 1   | 0    0
K |         |   └─        └─    |       └─    |
A | △6   △6 | △3          △3    |     △3      | △6   △6
```

P△.137 | Das Spielfeld V_0 wird durch En-passant-Schlagen (V_1, V_2, V_3) in das Spielfeld R_0 verwandelt.

```
  | R(V  , V  , V  , V  ) ⇒ R
V |   o    1    2    3      o
K |   △6   △2   △2   △2
```

```
Voraussetzung:  R△.75(V ┌ V  , V ┌ V  , V ┌ V  )
                      o┘  1    o┘  2    o┘  3
                      △4  △2   △4  △2   △4  △2
```

```
  | V   ⇒z | z ┌ V.1⇒z ┌ V.1 | 0⇒z ┌ V.1 | 0⇒z ┌ V.1 | z   ⇒ R△.136
V | o    o | o┘  1    o┘  2  |    o┘  1  |    o┘  3  | o     o
K |        |                 |           |           |
A | △6   △6| △3       △3     |    △3     |    △3     | △6    △6
```

Die Rechenpläne P△.140 bis P△.143 entsprechen den Rechenplänen P△.130 bis P△.133 , jedoch ist der Fall des aufgedeckten Schachs ausgeschlossen.

Sinnvolle Besetzung entsprechend P△.101 ist vorausgesetzt.

```
V | R(V  , V  ) => R
  |    0    1       0
K |   △6  △2       0
```

P△.140 „Es gibt einen weißen Stein, der nach Punkt V_1 gesetzt werden kann, ohne Schach aufzudecken. (Falls dort ein schwarzer Stein steht, kann dieser geschlagen werden.)

Der Rechenplan muß ~~einmal~~ die Bedingung enthalten, daß es einen weißen Stein gibt, der nach V_1 gesetzt werden kann (P△.130).

Der Fall des aufgedeckten Schachs wird durch die Bedingung ausgeschlossen, daß in der Feldbesetzung nach dem Zuge ($R△.136(V_0, x_0, V_1)$) dem weißen König nicht Schach geboten wird.

Der Fall, daß schon vorher Schach besteht, und durch Bewegen des auf V_1 stehenden Steins kein weiteres Schach aufgedeckt wird, ist dann zwar nicht in der Formel enthalten. Aber dieser Fall ist nicht interessant.

Die Formel wird zunächst ohne Berücksichtigung des En-passant-Schlagens aufgestellt.

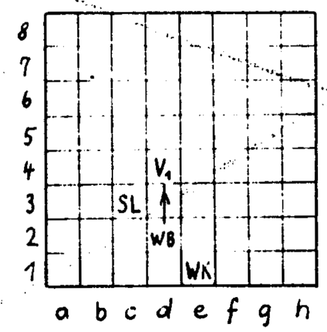
~~P△.140.0~~

```
  | (Ex)[x∈V  ∧x ≠0 ∧ x̄   ∧R△128(Sp1(V),x , V ) ┐
V |        0                            0       1  │
K |             1     1.3                   0      │
A | △4    △6  △3    0               △5     △2  △2  ↓

V |          └→∧R△.134(R△.136(V  , x  , V  ))] => R△140.0
K |                             0          1
  |                                   0
A |                            △6    △2   △2
```

Durch En-passant-Schlagen kann der Fall eintreten, daß der setzende Stein zwar zunächst Schach aufdeckt, aber gleichzeitig den schachbietenden Stein schlägt.

Beispiel:



Der weiße Bauer d2 geht nach d4, deckt hierbei die Linie c3–e1 auf, schlägt aber gleichzeitig den schachbietenden schwarzen Läufer c3 .

Da beim En-passant-Schlagen 3 Punkte (x, y, V_1) mitwirken, muß ein besonderer Ansatz für diesen Fall gemacht werden. Die Gesamtformel für P∆ .140.1 lautet dann:

```
P∆.140.1 |  (Ex)[x∈V ∧x  ≠0∧x̄  ∧R∆128(Sp1(V),x, V)∧R∆134(R∆136(V ,x ,V ))
         V          o                       o    1                o    1
         K            1    1.3                 o
         A  ∆4    ∆6  ∆3   o            ∆5     ∆2 ∆2             ∆6 ∆2 ∆2

           ∨(Ex)(Ey)[x∈V ∧x ≠0∧x̄  ∧y∈V ∧y ∧R∆128(Sp1(V), x, V )  ┐
         V              o              o               o     1    │
         K                  1    1.3       1.3                o   │
         A  ∆4  ∆4      ∆6  ∆3   o     ∆6  o          ∆5     ∆2 ∆2 ↓

         | ∧R∆75(x ,z ,y )∧R∆134(R∆137(V , x , V , y ))]  ⇒ R∆140.1
         V          1                  o        1
         K └→                               o        o
         A        ∆4 ∆4 ∆4             ∆6  ∆2   ∆2   ∆2       o
```

R∆ 140.1 ist noch abhängig von der bisher nicht berücksichtigten Bedingung des En-passant-Schlagens, daß dies unmittelbar nach dem Zuge erfolgen muß, in dem der zu schlagende Stein auf den gefährdeten Punkt gesetzt worden ist.

Um dies zu berücksichtigen, ist die Kenntnis der vorhergehenden Feldbesetzung erforderlich.

P∆ .141 — Entsprechend P∆ .140 für Schwarz. ~~Zwei Fälle P∆ .140.0~~
~~P∆ .140.1~~

```
K | x      an Stelle von   x ≠ V∧x̄
  | 1.3                          1.3
```

R∆ .135 an Stelle von R∆ .134

P∆ .142 — „Der Punkt V_1 ist durch Weiß gedeckt bzw. angegriffen." (Angreifender bzw. deckender Stein nicht wegen Schachaufdeckung gebunden.)
~~Der Fall des En-passant-Schlagens braucht hierbei nicht berücksichtigt zu werden.~~
Wie P∆ 140.0 , jedoch R∆ 129 an Stelle von R∆ 128.

P∆ .143 — Wie P∆ 142 , jedoch für Schwarz.

```
K | x      an Stelle von   x = 0∧x̄
  | 1.3                          1.3
```

R∆ .135 an Stelle von R∆ .134

Über die Identität der Pläne P∆ .140 und P∆ .142 bzw. P∆ .141 und P∆ .143 gilt das gleiche wie über die Pläne P∆ .130 bis P∆ .133 (s.S.22).

4) Rechenpläne über die Zugfreiheit von Steinen:

P Δ.144

$$\begin{array}{l|lllll} & R(V & , V &) & \Rightarrow R \\ V & 0 & 1 & & 0 \\ A & \Delta 5 & \Delta 2 & & 0 \end{array}$$

Voraussetzung: V_1 ist besetzt.

„Der auf V_1 stehende Stein kann bedingt einen Zug machen." (Ev. deckt er dabei Schach auf).

$$\begin{array}{l|llllll} & (Ex)[R\Delta 128(V & , V & , x &)] & \Rightarrow R\Delta.132 \\ V & & 0 & 1 & & \\ K & & & & & \\ A & \Delta 2 & \Delta 5 & \Delta 2 & \Delta 2 & \end{array}$$

P Δ.145

„Der auf V_1 stehende Stein kann einen Zug machen, ohne dabei Schach aufzudecken."

$$\begin{array}{l|llll|llll} & Nr(V &) & \Rightarrow z & & V & V & \Rightarrow z \\ V & 0 & & 0 & & 0 & 1 & 1 \\ K & & & & & & & \\ A & \Delta 5 & & \Delta 6 & & \Delta 3 & \Delta 2 & \Delta 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|lllllllll} & \bar{z}\rightarrow & [\overline{R\Delta 134}(z)\wedge(Ex) & [R\Delta 128(V & ,V & ,x)\wedge\overline{R\Delta 134}(R\Delta 136(z & ,V & ,x))] & \Rightarrow R\Delta 14 \\ V & 1 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 1 & \\ K & 3 & & & & & & & \\ A & 0 & \Delta 6 \quad \Delta 2 & \Delta 5 & \Delta 2 & \Delta 2 & \Delta 6 & \Delta 2 & \Delta 2 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|lllllllll} & z\rightarrow & [\overline{R\Delta 135}(z)\wedge(Ex) & [R\Delta 128(V & ,V & ,x)\wedge\overline{R\Delta 135}(R\Delta 136(z & ,V & ,x))] & \Rightarrow R\Delta 14 \\ V & 1 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 1 & \\ K & 3 & & & & & & & \\ A & 0 & \Delta 6 & \Delta 5 & \Delta 2 & \Delta 2 & \Delta 6 & \Delta 2 & \Delta 2 \quad 0 \end{array}$$

V_0 = Ausgangsfeldbesetzung.

z_0 = Ausgangsfeldbesetzung durch Punktbez. ergänzt.

V_1 = zu untersuchender Punkt.

x = Punkt, auf den der auf V_1 stehende Stein gesetzt werden kann.

$R\Delta.136(z_0, V_1, x)$ = Feldbesetzung nach vollzogenem Zug.

Die Fälle, daß V_1 durch Weiß $(\bar{z}_{1/3})$ besetzt ist und daß V_1 durch Schwarz $(z_{1/3})$ besetzt ist müssen getrennt werden.

$$\begin{array}{ll} \bar{z} & z \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}$$

Der Fall des En-passant-Schlagens ist in P△.145 indirekt mit enthalten, denn es ist der Fall, daß der auf V_1 stehende Stein ein Bauer ist und direkt schlägt, mit enthalten.

Ist das En-passant-Schlagen erlaubt, so muß jedoch auch das entsprechende direkte Schlagen erlaubt sein.

P△.146 „Der auf V_1 stehende Stein kann bedingt einen Zug machen, ohne in der neuen Stellung angegriffen zu werden." (Ev. deckt er dabei Schach auf.)

$$\begin{array}{l|cccc|cccc}
 & \mathrm{Nr}(V &) & \Rightarrow & z & V & V & \Rightarrow & z \\
V & 0 & & & 0 & 0 & 1 & & 1 \\
K & & & & & & & & \\
A & \Delta 5 & & & \Delta 6 & \Delta 3 & \Delta 2 & & \Delta 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|cccccccccc}
 & (Ex)\Big[R\triangle 128(V & ,V & ,x\;) \wedge \Big[\Big[& \bar{z} & \rightarrow \overline{R\triangle 143}(R\triangle 136(z & ,V & ,x\;))\Big] \\
V & 0 & 1 & & 1 & 0 & 1 & \\
K & & & & 3 & & & \\
A & \Delta 5 & \Delta 2 & \Delta 2 & 0 & \Delta 6 & \Delta 2 & \Delta 2 \\
 & & & \vee\Big[& z & \rightarrow \overline{R\triangle 142}(R\triangle 136(z & ,V & ,x))\Big]\Big]\Big] \\
V & & & & 1 & 0 & 1 & \\
K & & & & 3 & & & \\
A & & & & 0 & \Delta 6 & \Delta 2 & \Delta 2
\end{array}$$

$$\Rightarrow R\triangle 146$$

P△.147 Der auf V_1 stehende Stein kann einen Zug machen, ohne dabei Schach aufzudecken und ohne in der neuen Stellung angegriffen zu werden.

P△.147 ergibt sich aus einer Vereinigung von P△.145 und P△.146 .

```
P△.147
      |          Nr(V )     ⇒ z  | V ┌ V     ⇒ z
    V |              o        o  | o │ 1       1
    K |                          |  ─┘
    A |             △5       △6  | △3  △2     △3

                  ___________      ___________                   ___________
    V |z̄ ⇒ [RΔ134(z)∧(Ex) [RΔ128(V,V,x)∧RΔ134(RΔ136(z,V,x))⇒RΔ147
    V |1          o               o 1                    o 1
    K |3
    A |o         Δ6   Δ2          Δ5 Δ2 Δ2              Δ6 Δ2 Δ2
                                              ___________
    V |                                     ∧ RΔ143(RΔ136(z, V,x))
    K |                                                  o   1
    A |       [                 [                      Δ6  Δ2 Δ2 ] ]

                  ___________      ___________                   ___________
    V |z ⇒ [RΔ135(z)∧(Ex) [RΔ128(V,V,x)∧RΔ135(RΔ136(z,V,x))  ⇒RΔ147
    V |1          o               o 1                    o 1
    K |3
    A |o         Δ6   Δ2          Δ5 Δ2 Δ2              Δ6 Δ2 Δ2
                                              ___________
    V |                                     ∧ RΔ143(RΔ136(z, V, x))
    K |                                                 o   1
    A |       [                 [                     Δ6  Δ2  Δ2 ] ]
```

```
P△.148  „Der weiße König kann einen Zug machen, ohne dabei in
        Schach zu kommen."

      | R(V )  ⇒ R△148          Voraussetzung: Besetzung ent-
    V |   o        o                           spricht P△.101
    A |  Δ6        o

      | x́ [x ∈ V   ∧ x  =  --+-] ⇒ z
    V |        o                    o
    K |
    A | Δ4     Δ6                   Δ4
                                                ___________
      | (Ex)[x∈V  ∧RΔ17(z ,x)∧x=0∨x  ∧RΔ133(RΔ136(V ,z ,x),x)]
    V |        o          o                          o  o
    K |                   o  o  1    1.3                o  o  o
    A |  Δ4 [  Δ6         Δ2 Δ2                      Δ6 Δ2 Δ2 ]

                                                          ⇒ R△148
```

V_o = Ausgangsfeldbesetzung

z_o = Punktbesetztangabe für weißen König.

„Es gibt einen Punkt x, der zum Punkt des weißen Königs (z_o) benachbart ist (RΔ17) und auf dem kein Stein (x = 0) oder ein schwarzer Stein steht ($x_{1.3}$), und in der neuen Feldbesetzung (RΔ136(...)) ist der Punkt x nicht von Schwarz angegriffen ($\overline{R\Delta 133}$)."

P△.149 | Entsprechend P△.148 für den schwarzen König.

```
x = --++      an Stelle von     x = --+-
R△132         an Stelle von     R△133
```

P△.150 | „Es sind keine weißen Steine außer dem König vorhanden, oder diese können keinen Zug machen." (Voraussetzung für Patt).

```
  | R(V ) ⇒ R△150
V |   o
A |  △6     o

  | (x)[x ∈ V  ∧ x ≠ 0 ∧ x  ≠ --+- ∧ x̄   → R△145(Sp1(V),x )]
V |         o                                      o
K |            1      1         1.3                   o
A |  △4     △6 △3     △3        o              △5     △2
```

(In the formula above, "R△145" is overlined.)

P△.151 | Entsprechend P△.150 für Schwarz.

An Stelle von

```
  | x ≠ 0 ∧ x ≠ --+- ∧ x̄    tritt    x ≠ --++ ∧ x
K | 1       1        1.3             1         1.3
```

P△.152 | „Es gibt einen weißen Stein, der zwischen die Linie $V_1 - V_2$ gesetzt werden kann, ohne daß dabei Schach aufgedeckt wird."

```
  | R(V ,V ,V ) ⇒ R△152 | Es gilt  R△8(V,V) ∨ R△9(V, V)
V |   o  1  2      o    |              o 1         o  1
A |  △6 △2 △2      o    |
```

Voraussetzung: V_0 und V_1 liegen auf einer Geraden.

```
  | (Ex)[x ∈ V  ∧ x ∈ R△32(V ,V ) ∧ R△140(V ,x )] ⇒ R△152
V |          o             o  1          o
K |              o
A |  △4      △6 △2         △2 △2         △6 △2
```

P△.153 | Entsprechend P△.152 für Schwarz.

R△141 an Stelle von R△140.

5) Die Schachmatt- bzw. Patt-Bedingung:
(ohne Berücksichtigung des En-passant-Schlagens.)

```
P Δ 150 | R(V  ) ⇒ (R , R )       V  = Feldbesetzung
      V |   0        0   1         0
      K |   Δ5       0   0        R  = w.K. ist matt
                                   0
                                  R  = w.K. ist patt
                                   1

        | x́  (x ∈V  ∧ x = --+-) ⇒ z
      V |        0                 0
      K |              1
      A | Δ4   Δ5                 Δ4

        | x̂ (RΔ129(V ,x ,z ) ∧ x  ) ⇒ z   | N(z   ) ⇒ z  |
      V |            0    0              1 |    1        2  |
      K |               0   0    1.3       |                |
      A | Δ4          Δ6  Δ2 Δ2   0    □×Δ4 |   □×Δ4     1.2 |

        | (z  = 0) ∨ R Δ 148(V )  ⇒  Fin
      V |  2                  0
      K |
      A |  1.2               Δ6

        | (z  ≥2)∨[‾RΔ142‾(V ,z )∧(‾RΔ19‾(z ,z ) ∨ ‾RΔ152‾(V ,z ,z ))] ⇒ z
      V |  2                 0  1          0  1               0  0  1       3
      K |                       0.0        0  0.0                0  0.0
      A |  1.2              Δ6  Δ2         Δ2 Δ2             Δ6 Δ2 Δ2       0

        | RΔ150(V ) ⇒ z | z ∧ z̄ ⇒ R | z ∧ z ⇒ R
      V |       0      4 | 3   4    0 | 3   4    1
      K |                |            |
      A |      Δ6      0 | 0   0    0 |          0
```

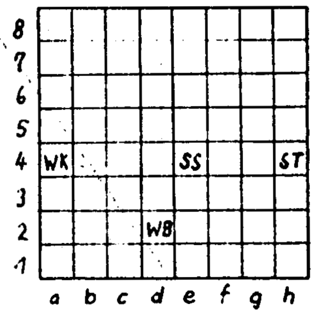
Bedeutung der Zwischenwerte:

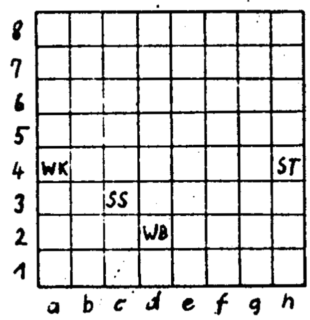
- z_0 = Punktbesetzt-Angabe des weißen Königs.
- z_1 = Liste der Punktbesetzt-Angaben, von denen aus der König angegriffen wird.
- z_2 = Anzahl der den König angreifenden Steine.
- z_3 = „Dem weißen König ist Doppelschach geboten ($z_2 \geq 2$), oder er kann weder den angreifenden Stein schlagen, noch diesen durch Dazwischensetzen eines Steines abdecken."
- z_4 = Kein Stein außer dem König kann einen Zug machen.

P△.161 Entsprechend P△.160 , jedoch für Schwarz.

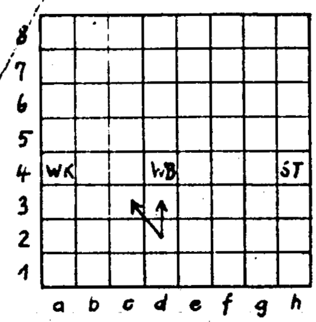
x = --++	an	Stelle	von	x = --+-
R△.149	"	"	"	R△.148
R△.143	"	"	"	R△.142
R△.153	"	"	"	R△.152
R△.151	"	"	"	R△.150

Beispiel eines Falles, durch En-passant-Schlagen Doppelschach zu begegnen, der nicht in P△.160, P△.161 berücksichtigt ist:





Se4 - c3 Doppelschach



Bd2 - d4 x Sc3

IV. Die Spielsituation.

1) Einführung neuer Angaben:

Zur Kennzeichnung der vollständigen Spielsituation genügt nicht die Feldbesetzung allein.

Diese muß durch folgende Angaben ergänzt werden:

a) Angabe, ob Weiß oder Schwarz am Zug ist.

b) Angaben darüber, ob und welche Rochaden gemacht werden können.

c) Angabe darüber, ob En-passant geschlagen werden kann.

Zu a): Diese Angabe wird durch einen einfachen Ja-Nein-Wert gekennzeichnet.

Zu b): Die Rochade ist an folgende Bedingungen gebunden:

α) Die zwischen König und Turm liegenden Felder müssen frei sein.

β) Der König darf über kein Feld gehen, das vom Gegner beherrscht wird.

γ) Die Rochade darf nicht ausgeführt werden, wenn dem zu bewegenden König Schach geboten ist.

δ) Die beteiligten Steine dürfen sich im bisherigen Spiel noch nicht bewegt haben.

Die Bedingungen α, β, γ ergeben sich aus der Feldbesetzung.

Für die Bedingung δ ist die Kenntnis des bisherigen Spielverlaufs erforderlich. Um nicht den ganzen Spielverlauf jedesmal in die Rechnung eingehen zu lassen, werden aus ihm vier Ja-Nein-Werte ermittelt, welche besagen, ob Weiß bzw. Schwarz die große bzw. die kleine Rochade ausführen darf. Diese vier Ja-Nein-Werte gehören mit zur Spielsituation.

Zu c): Die Angabe ergibt sich aus dem vorhergehenden Zuge. Und zwar genügt dabei die Angabe des Punktes, auf den der letzte Stein gesetzt wurde. Diese Angabe ($A\Delta 2$) ist Mit-Komponente der Spielsituation.

Dementsprechend können wir die Gesamtangabe „Spielsituation" wie folgt ansetzen:

$$A\Delta 9 = (A\Delta 5,\ So,\ S1.4,\ A\Delta 2)$$

Hierbei haben die einzelnen Komponenten folgende Bedeutung:

K0 (A△9) = A△5 , Feldbesetzung

K1 (A△9) = So , −Weiß ist am Zuge
+Schwarz ist am Zuge

K2 (A△9) = S1.4 , „Rochadeangabe"

Im Einzelnen:

K2.0 = So , „Weiß darf die große Rochade ausführen"

K2.1 = So , " " " kleine " "

K2.2 = So , Schwarz " " große " "

K2.3 = So , " " " kleine " "

K3(A△9) = A△2 , Punkt, auf den der letzte Stein gesetzt wurde; im Anfang und nach Rochade = 0 .

Die <u>Anfangssituation</u> ist durch die Konstante C△9 gekennzeichnet:

C△9 = (C△5, −, ++++, 0)

Es empfiehlt sich wieder, die Angabe A△10 einzuführen, in der die Komponente A△5 durch die Komponente A△6 ersetzt ist. (Feldbesetzung mit Punktangabe).

A△10 = (A△6, So, S1.4, A△2)

Die Anfangssituation ist durch die Konstante

C△10 = (C△6, −, ++++, 0)

gekennzeichnet.

Für die Angaben A△9 und A△10 gelten verschiedene Beschränkungen, denn nicht jede Variation ist sinnvoll. Siehe P△.192.

Der <u>Zug</u> muß durch folgende Angaben gekennzeichnet werden:

a) Normale Züge:

α) Punkt, von dem gesetzt wird,

β) Punkt, auf den gesetzt wird.

b) Rochade: Angabe, ob große oder kleine Rochade.

c) En-passant-Schlagen: Angabe, ob geschlagen wird.

Zu a): Es ist üblich, den setzenden Stein mit anzuführen und für den Fall, daß geschlagen wird, dies zu kennzeichnen (x) und den geschlagenen Stein anzugeben.

Ferner wird für den Fall, daß Schach geboten wird, dies besonders gemeldet.

Diese zusätzlichen Angaben sind an sich überflüssig, da sie aus der Spielsituation entnommen werden können.

Zu b): Die Rochade wird durch besondere Zeichen gekennzeichnet.

An sich würde es genügen, die Punkte anzugeben, die zur Bewegung des Königs dienen.

Da der König nur bei der Rochade zwei Schritte machen darf, ist diese somit gekennzeichnet.

Zu c): Wenn der geschlagene Stein stets angegeben wird, so erübrigt sich eine besondere Angabe.

Es wird mit zwei Zug-Angaben gearbeitet:

<u>Die konzentrierte Zug-Angabe A△11.</u>

Diese enthält nur die notwendigen Angaben.

$$A\triangle 11 = (A\triangle 2,\ A\triangle 2,\ So)$$

Es bedeuten:

K0(A△11) = A△2 ,	Punkt, von dem aus gesetzt wird
K1(A△11) = A△2 ,	Punkt, nach dem gesetzt wird
K2(A△11) = So ,	„Es wird geschlagen".

K2 ist an sich nur im Falle des En-passant-Schlagens von Interesse.

Die Kennzeichnung der Rochade erfolgt durch folgende Angaben:

a) große weiße Rochade	000,L00/000,0L0
b) kleine weiße Rochade	000,L00/000,LL0
c) große schwarze Rochade	LLL,L00/LLL,0L0
d) kleine schwarze Rochade	LLL,L00/LLL,LL0

Außer der Zug-Angabe A△11 wird noch die erweiterte Zug-Angabe <u>A△12</u> eingeführt. Diese wird jedoch zunächst nicht besprochen.

2) Operationen mit A△9, A△10:

```
  | R(V  ) ⇒ R
V |   0      0
K |  △10     0
```

P△.192 „Die Spielsituation erscheint möglich."

Es müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1) Die Stellungen der Bauern müssen der durch P△.64 (s. S.12) gekennzeichneten Bedingung genügen. (z_1)

2) Die Anzahl der einzelnen Steinsorten muß der durch P△.101 (s.S.18) gekennzeichneten Bedingung genügen. (z_2)

3) Es dürfen nicht beide Könige im Schach stehen. (z_3)

4) Einem König darf höchstens zweimal Schach geboten sein. (z_4)

5) Steht ein König im Schach, so muß seine Farbe gleich der Farbe sein, die am Zuge ist. (z_5)

6) Falls ein König bzw. ein Turm nicht ihre Ausgangsstellung innehaben, dürfen die entsprechenden Komponenten von K2(A△10) nicht positiv sein. (z_6)

7) Falls K3(A△10) nicht gleich Null ist, muß der entsprechende Punkt des Feldes durch einen Stein der Farbe besetzt sein, die nicht am Zuge ist. (z_7)

Durch P△.192 sind nicht alle unmöglichen Fälle ausgeschlossen. (Sind z.B. in der Anfangssituation Läufer und Springer vertauscht, so ist dieser Fall mit den Spielregeln nicht verträglich, ist aber in obiger Formel enthalten.)

Bedingung für zwei weiße bzw. zwei schwarze Läufer fehlt.

P△.192

```
  | (x)(x ∈ V  → R△64(x )) ⇒ z  | R△101[R△96(Sp1(V  ))]  ⇒ z
V |        0                  1  |                0          2
K |        0                     |                0
A |       △6        △4        0  |     △7     △5 △6          0

  | x́ (x ∈ V  ∧ x   = --+-) ⇒ z  | x́ (x ∈ V  ∧ x = --++) ⇒ z
V |       0                   10 |       0    1              11
K |       0    1                 |       0
A | △4   △6   △3             △4  | △4   △6   △3             △4

  | N[x̂ (x ∧ R△129(V , x , z  ))] ⇒ z
V |                0         10       12
K |     1.3        0    0    0
A |  △4 0         △6   △2   △2       1.n
```

Fortsetzung nächste Seite

```
 |N[x̂ (x ≠ 0 ∧ x̄  ∧ RΔ129(V , x , z ))] ⇒ z
V|                           o       11       13
K|               1.3         o   o   o
A|  Δ4           o           Δ6  Δ2  Δ2        1.n

 |(z   = 0 ∨ z    = 0) ⇒ z  |(z   ≤ LO ∧ z   ≤ LO) ⇒ z
V| 12        13          3  | 12         13          4
K|                          |
A| 1.n       1.n         o  | 1.n        1.n         o

 |(z    ≠ 0 → V̄) ∧ (z    ≠ 0 → V) ⇒ z
V| 12         o      13       o     5
K|            1               1
A| 1.n        o      1.n      o     o

 |(V                 = +−+−) ⇒ z     |(V                  = −−+−) ⇒ z
V| o                           14.0  | o                            14.1
K| o.(ooo,ooo).1                     | o.(ooo,Loo).1
A| Δ3                          o     | Δ3                           o

 |(V                  = +−+−) ⇒ z    |(V                  = +−++) ⇒ z
V| o                            14.2 | o                            14.3
K| o.(ooo,LLL).1                     | o.(LLL,ooo).1
A| Δ3                           o    | Δ3                           o

 |(V                  = −−++) ⇒ z    |(V                  = +−++) ⇒ z
V| o                            14.4 | o                            14.5
K| o.(LLL,Loo).1                     | o.(LLL,LLL).1
A| Δ3                           o    | Δ3                           o

 |(V  → z    ∧ z   ) ∧ (V  → z    ∧ z   ) ∧ (V  → z    ∧ z   ) ∧ (V  → z    ∧ z   ) ⇒ z
V| o    14.0  14.1     o    14.1  14.2     o    14.3  14.4     o    14.4  14.5     6
K| 2.o                 2.1                 2.2                 2.3
A| o    o     o        o    o     o        o    o     o        o    o     o        o

 |V  ≠ 0 → [(V ⌐ V.1.3) ~ V̄] ⇒ z |z ∧ z ∧ z ∧ z ∧ z ∧ z ∧ z ⇒ R
V|o          o   o          o    7 |1   2   3   4   5   6   7   o
K|3          o.┘ 3          1      |
A|Δ2         o              o    o |
```

Zu PΔ .192.

Bedeutung der Zwischenwerte:

- z_1 bis z_7 Einzelbedingungen entsprechend S.35.
- z_{10} = Punkt-Besetzt-Angabe des weißen Königs.
- z_{11} = Punkt-Besetzt-Angabe des schwarzen Königs.
- z_{12} = Anzahl der den weißen König angreifenden Steine.
- z_{13} = Anzahl der den schwarzen König angreifenden Steine.
- $z_{14.0}$ bis $z_{14.5}$ = Angaben, ob Türme und Könige die Ausgangsstellungen innehaben.

PΔ.193 Möglichkeit der Rochade für Weiß:

```
  R(V   ) ⇒ (R, R)   |  R  = große Rochade möglich
    0        0  1    |   0
   Δ10       0  0    |  R  = kleine Rochade möglich
                     |   1
```

```
  | (V          =+-+-)∧(V          =0)∧(V          =0)  ↴
V |  0                   0                0
K |  0.(0,0).1           0.(0,1).1        0.(0,2).1
A |  Δ3                  Δ3               Δ3

  | ↳∧(V          =0)∧R̅Δ̅1̅3̅3̅(V , (0,2))∧R̅Δ̅1̅3̅3̅(V , (0,3)) ⇒ z
V |    0                      0                    0          0
K |    0.(0,3).1              0                    0
A |    Δ3                     Δ6                   Δ6         0

  | (V          =--+-)∧R̅Δ̅1̅3̅3̅(V , (0,4)) ⇒ z
V |  0                        0               1
K |  0.(0,4)                  0
A |  Δ3                       Δ6              0

  | (V          =0)∧(V          =0)∧(V          =+-+-)  ↴
V |  0              0               0
K |  0.(0,5).1      0.(0,6).1       0.(0,7).1
A |  Δ3             Δ3              Δ3

  | ↳∧R̅Δ̅1̅3̅3̅(V , (0,5))∧R̅Δ̅1̅3̅3̅(V , (0,6)) ⇒ z
V |          0                   0             2
K |          0                   0
A |          Δ6                  Δ6            0

  | z ∧ z ∧ V   ⇒ R  | z ∧ z ∧ V   ⇒ R
V | 0   1   0     0  | 1   2   0     1
K |         2.0      |         2.1
A | 0   0   0     0  | 0   0   0     0
```

PΔ.194 Entsprechend PΔ.193 für Schwarz.

PΔ.195 **Vollständige Mattbedingung.**

Entsprechend RΔ160, jedoch mit Berücksichtigung des En-passant-Schlagens.

Die in PΔ.160 nicht enthaltenen Fälle (s.S.31) sind durch folgende Bedingungen gekennzeichnet:

1) Es besteht Doppelschach.
2) Einer der angreifenden Steine (x_1) muß auf der Waagrechten (□,2) stehen. (In der üblichen Bezeichnung ist es die Waagrechte (□,3).)
3) Es muß einen weißen Bauern geben (x_2), der diesen Stein En-passant schlagen kann, d.h. er muß zu ihm in Schlagstellung stehen und die beiden vor ihm liegenden Felder müssen frei sein.
4) Das Feld, auf welches der Bauer gesetzt wird, muß zwischen dem weißen König und dem anderen angreifenden Stein (x_3) liegen.

Übernehmen wir aus PΔ.160 die Werte z_0, z_1, z_2, so lautet der Ansatz für die Bedingungen 2, 3, 4:

```
  | (Ex)(Ex)(Ex)[x ∈ z    ∧x   =oLo∧x   =V  ∧RΔ14(x ,x)∧x =+--┐
V |   1   2   3  1   1     1        1    o         2  1  2    ↓
K |                        o.1      o    3            o  1
A |  Δ4  Δ2  Δ4  Δ4 2xΔ4   Δ1       Δ2   Δ2       Δ2 Δ2 Δ3
```

```
  | └>V ┌o.(x, oLo).1=0 V┌o.(x ,oLL).1=0∧x ∈z   ∧x ≠ x  ┐
V |   o┘    2             o┘   2           3  1    1   3   ↓
K |   -     o.o           -    o.o
A |  Δ3     Δ1            Δ3   Δ1          Δ4 2xΔ4
```

```
  | └>∧RΔ28((x  ,oLL), z , x )] ⇒ z
V |         2          o   3      5
K |         o.o        o   o
A |         Δ1         Δ2  Δ2     o
```

Der Ansatz für PΔ.195 lautet dann:

```
  | RΔ160(V )∧[z Δ160 = 2 → z̄] ⇒ RΔ195
V | o      o   2           5
K |        o
A |        Δ6  1.n         o
```

Hiernach läßt sich PΔ.195 leicht entwickeln.

PΔ.196 Entsprechend PΔ.195 für Schwarz.

P△.200 Bildung der neuen Spielsituation aus der gegebenen und der Zugangabe:

	R(V	, V	) ⇒ R△200
V	o	1	o
A	△10	△11	△10

(Voraussetzung: Sinnvolle Spielsituation und erlaubter Zug.)

Die Operation erfolgt in mehreren Teilen:

1) Bildung der neuen Feldbesetzung:

a) Normale Züge. Entsprechend P△.136.

b) En-passant-Schlagen:
Kriterium dafür ist: Der setzende Stein ist ein Bauer; dieser geht zwei Felder geradeaus und es wird geschlagen.
Es muß außer der normalen Spielfeldänderung durch den setzenden Stein der geschlagene Stein im Spielfeld gestrichen werden.

c) Rochade:
Kriterium dafür ist: Der setzende Stein ist ein König und dieser geht seitlich über zwei Felder. Farbe des Königs und Richtung seiner Bewegung geben Art der Rochade an.
Es muß außer der normalen Spielfeldänderung durch den setzenden König die Spielfeldänderung durch den Turm berücksichtigt werden.

2) Bildung der Angabe, ob Weiß oder Schwarz am Zuge ist. Umkehrung der Komp. V_{o_1}.

3) Bildung der Angaben, ob Rochade erlaubt ist:
Die Angabe $V_{o.2}$ wird übertragen, falls der setzende Stein nicht Turm oder König ist. Sonst entsprechende Änderung.

4) Die 3. Komponente von R_o ergibt sich aus dem Punkt, auf den gesetzt wurde.

```
PΔ.200 | V   ⇒ z   |z┌ V ⇒ z  |z   ⇒ z┌─ V.1|0 ⇒ z┌V.1
     V | o     o   |o│ 1   1  |1     o│  1  |    o│1
     K | o         | ┘ o      |1     ─┘  1  |    ─┘o
     A | Δ6    Δ6  |Δ3 Δ2  Δ4 |Δ3    Δ3  Δ2 |    Δ3 Δ2

       |[z  =+──o∧(|V   ─V| =LO)∧V]⇒[o ⇒ z┌─ V.1]
     V | 1          1    1         1     o│   o
     K | 1          1.1  o.1       2     ─┘   3
     A |[Δ3         Δ1   Δ1        o]    Δ3      ]

       | z  =──+─∧(V   ─V   =LO)⇒[0⇒z        | +─+─⇒z    ]
     V | 1         1    1          o          |      o
     K | 1         o.o  1.o        (o,o).1    |      (3,o).1
     A | Δ3        Δ1   Δ1         Δ3         |      Δ3    ]

       | z  =──+─∧(V   ─V   =LO)⇒[0⇒z        | +─+─⇒z    ]
     V | 1         1    1          o          |      o
     K | 1         1.o  o.o        (7,o).1    |      (5,o).1
     A | Δ3        Δ1   Δ1         Δ3         |      Δ3    ]

       | z  =──++∧(V   ─V   =LO)⇒[0⇒z        | +─++⇒z    ]
     V | 1         1    1          o          |      o
     K | 1         o.o  1.o        (o,7).1    |      (3,7).1
     A | Δ3        Δ1   Δ1         Δ3         |      Δ3    ]

       | z  =──++∧(V   ─V   =LO)⇒[0⇒z        | +─++⇒z    ]
     V | 1         1    1          o          |      o
     K | 1         1.o  o.o        (7,7).1    |      (5,7).1
     A | Δ3        Δ1   Δ1         Δ3         |      Δ3    ]
```

$\overline{z = ((o,o),\ +{-}+{-})}$ … $\overline{z = {-}{-}+{-}}$

```
       | V    ∧ z =((o,o), +─+─) ∧ z = ──+─  ⇒ R
     V | o      1                  1           o
     K | 2.o                       1           2.o
     A | o      Δ4                 Δ3          o

       | V    ∧ z =((7,o), +─+─) ∧ z = ──+─  ⇒ R
     V | o      1                  1           o
     K | 2.1                       1           2.1
     A | o      Δ4                 Δ3          o

       | V    ∧ z =((o,7), +─++) ∧ z = ──++  ⇒ R
     V | o      1                  1           o
     K | 2.2                       1           2.2
     A | o      Δ4                 Δ3          o

       | V    ∧ z =((7,7), +─++) ∧ z = ──++  ⇒ R
     V | o      1                  1           o
     K | 2.3                       1           2.3
     A | o      Δ4                 Δ3          o

       | z    ⇒ R  | V̄ ⇒ R | V    ⇒ R
     V | o      o  | o   o | 1      o
     K |        o  | 1   1 | 1      3
     A | Δ6     Δ6 | o   o | Δ2     Δ2
```

(In the last four blocks above, the terms $z = ((\ldots),\ \ldots)$ and $z = \ldots$ are overlined, i.e. negated.)

Normal ...

Normale Züge

En-passant-Schlagen

gr.w.Rochade

kl.w.Rochade

gr.s.Rochade

kl.s.Rochade

Bildung der Feldbesetzung

gr.w.R.

kl.w.R.

gr.s.R.

kl.s.R.

Bildung der Angaben „Rochade erlaubt"

Endwerte

Resultat

Andere Darstellung von P∆.200. Herausziehen der „Zuganalyse" als Sonderplan.

P∆.201 „Zuganalyse".

$$\begin{array}{c|lllllll}
 & R(V & ,V &)\Rightarrow(R & ,R & ,R & ,R & ,R\;)\\
V & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\
A & \Delta 6 & \Delta 11 & \Delta 3 & 0 & 0 & 0 & 1.2
\end{array}$$

R_0 = ziehender Stein
R_1 = „Normaler Zug"
R_2 = „En-passant-Schlagen"
R_3 = „Rochade"
R_4 = Art der Rochade

$$\begin{array}{c|lll|ll|lll|lll}
 & V\ulcorner V & \Rightarrow & Z & Z & \Rightarrow R & V & -V & \Rightarrow Z & V & -V & \Rightarrow Z\\
V & 0\;\;\;\;1 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\
K & \llcorner\;\;\;0 & & & 1 & & 1.0 & 0.0 & & 1.1 & 0.1 & \\
A & \Delta 6\;\Delta 11 & & \Delta 4 & \Delta 3 & \Delta 3 & \Delta 1 & \Delta 1 & 8.2 & \Delta 1 & \Delta 1 & 8.2
\end{array}$$

R_4	
−−	gr.w.R.
−+	kl.w.R.
+−	gr.s.R.
++	kl.s.R.

$$\begin{array}{c|llll}
 & Z = +--0\wedge(Z & = 2)\wedge V & \Rightarrow R & \\
V & 0 & 2 & 1 & 2\\
K & 1 & & 2 & \\
A & \Delta 3 & 8.2 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ll|c|l|lll}
 & \lceil Z = --+0 & \wedge\,|Z| = 2\rceil & \rightarrow & \lceil + \Rightarrow R & (Z\;, & Z) & \Rightarrow R\rceil\\
V & 0 & 1 & & 3 & 0 & 1 & 4\\
K & 1 & & & & 1.3 & 0 & \\
A & \lfloor\Delta 3 & 8.2\rfloor & & \lfloor\;\;\;\;0 & 0 & 0 & 0\rfloor
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|lll}
 & \overline{R}\;\wedge & \overline{R} & \Rightarrow R\\
V & 2 & 3 & 1\\
K & & & \\
A & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

P∆.202 Bildung der neuen Spielsituation aus der gegebenen und der Zugangabe mit Hilfe des Unterplans P∆.201.

Es gilt P∆.200 ∼ P∆.202 .

$$\begin{array}{c|lll}
 & R(V & ,\;V\;) & \Rightarrow R\\
V & 0 & 1 & 0\\
A & \Delta 10 & \Delta 11 & \Delta 10
\end{array}$$

Die Variation der verschiedenen Fälle der Rochade wird durch Zusammenfassung der möglichen Werte der beteiligten Punkte in zwei Plankonstanten Cp_0 und Cp_1 dargestellt.

```
PΔ.202 |   | V   ⇒ z  | z ┌ V   ⇒ z  | z   ⇒  z ┌ V.1 | 0 ⇒ z ┌ V.1
       | V | o     o  | o ┘ 1     1  | 1      o ┘ 1   |     o ┘ 1
       | K | o        |     o        | 1          1   |         o
       | A | Δ6    Δ6 | Δ3  Δ2    Δ4 | Δ3     Δ3  Δ2  |     Δ3  Δ2

       |   | R Δ201(z  , V ) ⇒ (□, □, z, z, z  )
       | V |         o   1              2  3  4
       | K |
       | A |         Δ6  Δ11            o  o  1.2

       |   | z →[0 ⇒ z ┌ V.1]| [o,o]= Cp    [3,o] = Cp
       | V | 2  [      o ┘ o  ]| [o,7]  o     [3,7]   1
       | K |    [          3  ]| [7,o]        [5,o]
       | A | o  [      Δ3     ]| [7,7]  4xΔ2  [5,7]   4xΔ2

       |   | z →[0 ⇒ z ┌ (Cp ┌ z ).1 | (+,-,+,V) ⇒ z ┌ (Cp ┌ z ).1]
       | V | 3  [      o ┘  o ┘  4   |     o       o ┘  1 ┘  4    ]
       | K |    [                    |     1                      ]
       | A |    [      Δ3   Δ2   1.2 |     o       Δ3   Δ2   1.2  ]

       |   | i    W[V   ∧ z  = (Cp, (+,-,+,V)) ∧ z = (-,-,+,V) ⇒ R  ]
       | V |       [o     1    o           o     1           o    o  ]
       | K |       [2.i        i           1     1           1    2.i]
       | A | 1.2   [o     Δ4   Δ2          o     Δ3          o    o  ]

       |   | z     ⇒ R  | V̄ ⇒ R | V   ⇒ R
       | V | o       o  | o    o | 1     o
       | K |         o  | 1    1 | 1     3
       | A | Δ6      Δ5 | o    o | Δ2    Δ2
```

P△.203 **Spielkontrolle.** „Der Zug ist erlaubt."

Angaben über Schachmatt und Patt.

	R(V	, V	) ⇒ (R,	R	, R,	R)
V	0	1	0	1	2	3
A	Δ10	Δ11	0	Δ10	0	0

V_0 = Gegebene Situation
V_1 = Zug
R_0 = „Zug ist erlaubt"
R_1 = Neue Situation
R_2 = „Schachmatt"
R_3 = „Patt" - } derjenigen Farbe, die nicht am Zuge war

Der Rechenplan wird in folgende Teile aufgeteilt:

1) Zuganalyse entsprechend P△.201 (z_0 bis z_4).
2) Untersuchung, ob die ziehende Farbe am Zuge ist (z_{10}).
3) Untersuchung des Zuges, ob erlaubt
   a) Normale Züge (z_{11})
   b) En passant (z_{11}, z_{12})
   c) Rochade
4) Bildung der neuen Spielsituation entsprechend P△.202.
5) Untersuchung, ob Schach oder Patt.

Die Bedingung, daß Zugfolgen höchstens zweimal wiederholt werden dürfen, ist in P△.203 <u>nicht</u> enthalten. Dies kann erst an Hand der Registrierung sämtlicher Züge (des Spielverlaufs) ermittelt werden.

```
P∆.203 | R∆201(V ,V ) ⇒ (z , z, z, z, z  )
     V |       o  1      o  1  2  3  4
     K |       o
     A |       ∆6 ∆11    ∆3 o  o  o  1.2                          1)

       | z ~ V ⇒ z
     V | o   o   10
     K | 3
     A | o   o   o                                                2)

       | z v z → [R∆128(Sp1(V ), V , V ) ⇒ z ]
     V | 1   2   [           o    1   1     11]
     K |         [           o    o   1       ]
     A | o   o   [      ∆5   ∆6   ∆2  ∆2    o ]                   3a, b)

       | z → [V ┌ o.V  = z ]
     V | 2   [o ┘   o    6 ]
     K |     [      3      ]
     A | o   [∆3    ∆2   ∆3]                                      3 b)

       |[z → [(V̄→R∆14(V ,V))∧(V→R∆15(V ,V ))∧z ≠0∧z~V̄] ⇒ z
     V |[2     o       1  o     o      1  o    6    6  o]    12
     K |[      1       o  3     1      o  3         3  1]
     A |[o     o       ∆2 ∆2    o      ∆2 ∆2   ∆3   o  o]    o    3 b)

       |[z → [V̄∧z̄ →R∆193(V )]∧[V̄∧z →R∆193(V  )]   ⇒ z
     V |[3    o 4  o     o      o 4  1      o          13
     K |[     1 1                1 1
     A |[o    o o  o     ∆10    o o  o      ∆10        o
       |[    ∧[V∧z̄ →R∆194(V )]∧[V∧z →R∆194(V  )]]
     V |[     o 4  o     o      o 4  1      o  ]
     K |[     1 1                1 1           ]
     A |[     o o  o     ∆10    o o  o      ∆10]                  3 c)

       | R∆202(V , V  ) ⇒ z | (V̄∧R∆134(z))v(V∧R∆135(z))⇒z
     V |       o   1      5 |  o       5    o       5    14
     K |                    |  1       o    1       o
     A |      ∆10 ∆11    ∆10|  o       ∆6   o       ∆6           4), 5)

       | (V̄ ∧ R∆196(z)) v (V ∧ R∆195(z)) ⇒ R
     V |  o         5      o         5     2
     K |  1                1         o
     A |  o        ∆10     o         ∆6    o                      5)

       | (V ∧ R∆160(z)) v (V ∧ R∆161(z)) ⇒ R
     V |  o  1      5      o  1      5     3
     K |  1         o      1         o
     A |  o  o      ∆6     o         ∆6    o                      5)

       | z ∧ (z  ∧ z ) v z  ∧ z̄  ⇒ R | z  ⇒ R
     V | 10   11   12   13   17   o  | 5    1
     K |                             |
     A | o    o    o    o    o    o  | ∆10  ∆10
```

Zu P△.205. Bedeutung der Werte:		A
V_0	= Gegebene Situation	△10
V_1	= Zug	△11
z_0	= Ziehender Stein	△3
z_1	= „Normaler Zug"	0
z_2	= „En passant-Schlagen"	0
z_3	= „Rochade"	0
z_4	= Art der Rochade ($\bar{z}_{4/1}$ = gr.R., $z_{4/1}$ = kl.R.)	1.2
z_5	= Neue Situation	△10
z_6	= Stein, der im vorhergehenden Zug gesetzt wurde (Durch En passant geschlagen)	△3
z_{10}	= „Farbe des ziehenden Steins ist gleich der Farbe, die am Zuge ist"	0
z_{11}	= „Normaler Zug erlaubt bzw. Setz-Bedingung des En passant erfüllt"	0
z_{12}	= „Schlag-Bedingung bei En passant erfüllt" (z_6 darf En passant geschlagen werden)	0
z_{13}	= „Rochade-Bedingung erfüllt"	0
z_{14}	= „Der König der Farbe, die den Zug gemacht hat, steht in der neuen Situation im Schach"	0
R_0	= „Der Zug ist erlaubt"	0
R_1	= „Neue Situation"	△10
R_2	= „Durch den Zug ist die andere Farbe matt gesetzt"	
R_3	= „Durch den Zug ist die andere Farbe patt gesetzt"	

Der Fall, daß nur beide Könige übrigbleiben, ist nicht berücksichtigt (ergibt Remis).

Nur ein Springer oder nur ein Läufer ergibt ebenfalls Remis.

Bauernumwandlung fehlt
([illegible] ergänzen)