Title:	Einführung in die allgemeine Dyadik. Vorentwurf zur Schaltungsmathematik.
Author(s):	Konrad Zuse
Date:	1938
Published by:	Konrad Zuse Internet Archive
Source:	Document - ZIA ID: 0237

Einführung in die allgemeine Dyadik*

Von Dipl.Ing. Konrad Zuse

Im folgenden soll eine Theorie entwickelt werden, um schematische Denkaufgaben mechanisch zu lösen. Als schematische Denkoperationen gelten alle die Formeln, Ableitungen, Algorithmen und dergl., bei denen für alle in frage kommenden Fälle nach einer klaren Vorschrift ausgegebenen Ausgangszustände bestimmte Resultatangaben abgeleitet werden. Zur untersten Stufe gehört das Rechnen mit Zahlen; hier ist der Rechnungsgang so schematisch und klar, daß mechanische Lösungen bereits in großem Umfang angewandt werden. Aus diesem Gebiet werden daher auch zunächst die Beispiele gegriffen, jedoch wollen wir jetzt schon beachten, daß das Zahlenrechnen nur ein Spezialgebiet des allgemeinen Rechnens ist. Die Frage, welche anderen Gebiete der Logik und ihrer Anwendungen sich durch „Rechnen“ erschließen lassen, wollen wir erst untersuchen, wenn die hier aufzustellende Lehre in ihren Möglichkeiten klarer zu überblicken ist.

Unter „Rechnen“ wollen wir also verstehen: Aus gegebenen Angaben nach einer Rechenvorschrift neue Angaben zu bilden. Wir haben also zunächst den Begriff der Angaben. Diese können sehr verschiedene Bedeutung haben, z.B. Zahlen, Aussagen, Namen, Kennziffern, Dienstgrade, Daten, Befehle, Nachrichten, Schlußfolgerungen u.s.w.. Gemeinsam ist allen die Variabilität ihrer Aussage, denn wenn jede Ausgangsangabe nur eine Möglichkeit zuließe, so wäre ein Rechnen überflüssig, da ja dann auch nur ein Resultat in Frage käme. So ist z.B. das Vorzeichen einer Zahl zweifach variabel, eine Dezimalziffer 10-Fach, ein Buchstabe 26-fach, die Angabe über die Bataillionszugehörigkeit innerhalb eines Regiments dreifach variabel.

Die primitivste Form der Angabe ist offenbar die zweifach variable Angabe. Diese Erkenntnis wandte Leibniz auf Zahlen an und fand, daß es möglich ist, aus zweifach variablen Angaben, nämlich den Ziffern 0 und L ein Zahlensystem aufzustellen, das allen Anforderungen genügt. Er nannte dieses System die Dyadik. Dieses Prinzip läßt sich nun auf andere Gebiete erstrecken. So wird in der formalen Logik bei dem Aussagenkalkül mit den Angaben „richtig“ und „falsch“ gearbeitet.

Eine zweifach variable Angabe sei im folgenden kurz als „Dyade“ bezeichnet und der Name „Dyadik“ allgemein auf das Rechnen mit Dyaden übertragen. Für

*Zup 009/004. Version 1, die Abbildungen fehlen. Durchgesehen von R. Rojas, L. Scharf das Zahlensystem mit der Basis 2 wollen wir den Ausdruck „Sekundalsystem“ verwenden, das hier also nur ein Spezialgebiet der Dyadik darstellt. Sekundalzahlen bestehen von vornherein aus Dyaden. Dezimalzahlen sind an sich aus 10-fach variablen Angaben zusammengesetzt, diese lassen sich aber durch 4 Dyaden darstellen, indem man die Ziffern einzeln ins Sekundalsystem übersetzt.

Beispiel:

$$\begin{array}{ccll} & & \quad 7 & \;\; 3 \\ 73 & = & OLLL & LL \end{array}$$

Es stellt dies immer noch eine Dezimalzahl dar, da ja die Ziffern nur anders geschrieben sind. Die entsprechende Sekundal wäre:

$$73 = LOOLOOL$$

Buchstaben lassen sich durch 5 Dyaden darstellen, wie es in der Telegraphie üblich ist. Allgemein ist eine n-stellige Dyadenfolge 2^n-fach variabel, eine 5-stellige Dyadenfolge also 32-fach; es können neben den 26 Buchstaben noch 6 weitere Zeichen in die Darstellung einbegriffen werden. (Zwischenraum muß auch als Zeichen aufgefaßt werden.) Bei Rechenplänen bestehen die Angaben des Lochstreifens, der die Maschine steuert, ebenfalls aus Dyaden, die hier die Bedeutung von Befehlen haben.

Darstellung von Dyaden

Dyaden können in bestimmter und unbestimmter Form dargestellt werden, entsprechend den Zahlen und den Buchstabensymbolen bei Werten. Für die bestimmte Darstellung brauchen wir zweifach variable Zeichen, z.B. $(-, +)$; $(0, L)$.

Die Art des Zeichens ist prinzipiell gleichgültig, jedoch ist die Bezeichnung (O, L) im allgemeinen auf Zahlen und Ziffern beschränkt. Prinzipiell kann man auch Sekundalzahlen durch $-$, $+$ - Zeichen darstellen, wobei man passend für 0 – $-$ und für L – $+$ setzt, da durch 0 das Vorhandensein der betreffenden Potenz von 2 verneint, durch L bejaht wird.

Für die unbestimmte Bezeichnung wählt man praktisch Buchstaben ev. mit Index.

Dyadik und Aussagenkalkül

Das Rechnen mit Dyaden besteht darin, aus bekannten Dyaden neue abzuleiten. Die neuen Dyaden sind positiv bzw. negativ, wenn die bekannten bestimmte Bedingungen erfüllen. Dyadische Formeln sind die Niederschrift dieser Zusammenhänge. Sie geben das Zusammenspiel notwendiger und hinreichender Bedinmgungen an, aus denen die gesuchten Dyaden sich ergeben.

Die Dyadik läßt sich somit als Bedingungskombinatorik auffassen.

Die Grundgesetze sind gleich denen des Aussagenkalküls, wie sie von Hilbert für die Formeln der Logik aufgestellt wurden.(Hilbert, Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, 1. Kap.). Sie stellen die Verknüpfung von Aussagen dar, die richtig oder falsch sein können, also dyadischer Natur sind. Der Unterschied ist der, daß in der Logik aus gegebenen Axiomen richtige Schlußfolgerungen gezogen werden, während die Dyadik die theoretischen Grundlagen zur mechanischen Durchführung von Rechnungen schafft. Dementsprechend hat es keinen Sinn, die Bezeichnungen „richtig“ und „falsch“ zu übernehmen. (Bei einer Dyade können beide Möglichkeiten der Aussage „richtig“ sein). An die Stelle tritt die Bezeichnung pos. und neg. Wohl aber lassen sich die sonstigen Symbole und Bezeichnungen verwenden. Als Grundoperationen gebrauchen wir die Konjuktion, die Disjunktion und die Negation.

1. Konjunktion.
   $(A\&B)$ ist pos., wenn sowohl A als auch B pos. ist. Durch das Zeichen & werden also notwendige Bedingungen miteinander verbunden.
2. Disjunktion.
   $(A \vee B)$ ist pos., wenn mindestens eine der beiden Dyaden pos.ist. Das Zeichen $\vee$ verbindet hinreichende Bedingungen.
3. Negation.
   $\bar{A}$ ist pos., wenn A neg. ist.

Die Ausdrücke „logische Summe“ und „logisches Produkt“ sollen nicht verwandt werden, da sie nur Verwirrung stiften würden.

Das Zeichen der Äquivalenz $\sim$ und der Implikation $\rightarrow$ wollen wir nur entsprechend der Gleichheitszeichen in der Mathematik verwenden.

$$A \sim B$$

bedeutet, daß A und B stets zugleich pos. oder neg. sind. Die Seiten der Gleichung lassen sich also vertauschen.

$$A \rightarrow B$$

bedeutet, wenn A pos. ist, so ist auch B pos. B kann aber auch aus anderen Verknüpfungen pos. sein. A ist nur eine Bestimmung für B. Die Seiten der Gleichung sind nicht vertauschbar.

Dagegen sollen Ausdrücke folgender Art vermieden werden:

$$[(A \sim B)\&(C \to D)] \sim E.$$

in denen Implikation und Äquivalenz Operationen darstellen.

Die Grundoperationen lassen sich zu Formeln zusammenstellen, für ihre Behandlung gelten folgende *Regeln:*

1.)	$\overline{\overline{X}}$	$\sim$	X	(Doppelte Verneinung)
2.)	$X\&Y$	$\sim$	$Y\&X$	(Kommutation)
3.)	$X\&(Y\&Z)$	$\sim$	$(X\&Y)\&Z$	(Assoziation)
4.)	$X \vee Y$	$\sim$	$Y \vee X$	(Kommutation)
5.)	$X \vee (Y \vee Z)$	$\sim$	$(X \vee Y) \vee Z$	(Assoziation)
6.)	$X \vee (Y\&Z)$	$\sim$	$(X \vee Y)\&(X \vee Z)$	(1. distributives Gesetz)
7.)	$X\&(Y \vee Z)$	$\sim$	$(X\&Y) \vee (X\&Z)$	(2. distributives Gesetz)
8.)	$\overline{X\&Y}$	$\sim$	$\overline{X} \vee \overline{Y}$	Ableitung der
9.)	$\overline{X \vee Y}$	$\sim$	$\overline{X}\&\overline{Y}$	Konjunktion aus
10.)	$X \vee Y$	$\sim$	$\overline{\overline{X}\&\overline{Y}}$	der Disjunktion
11.)	$X\&Y$	$\sim$	$\overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}$	und umgekehrt.
12.)	$X\&X$	$\sim$	X	Erweitern
13.)	$X \vee X$	$\sim$	X	Erweitern
14.)	$X\&\overline{X}$	$\sim$	$-$	stets neg. (Sperre)
15.)	$X \vee \overline{X}$	$\sim$	$+$	stets pos. (Indifferenz)

Konstruktive Lösungen.

Es sollen schon jetzt konstruktive Lösungen gestreift werden, um die Formeln durch die entsprechenden konstruktiven Symbole veranschaulichen zu können.

Es lassen sich Elementarvorrichtungen bilden, die die drei Grundoperationen lösen. Wir brauchen:

1. Als Träger der Dyaden Elemente, die zwei Zustände annehmen können, z.B. einen Hebel mit zwei Stellungen oder einen elektrischen Leiter, der Strom führt oder nicht. (bzw. pos. oder neg. Strom).

2. Eigentliche Rechenglieder, die die Grundaufgaben lösen, d.h. die entsprechend der Angabe der die Ausgangsdyaden darstellenden Teile einen anderen Teil in den sich aus der Operation ergebenden Zustand bringen.

Ein bekanntes Maschinenelement, das diesen Bedingungen genügt, ist das elektromagnetische Relais. Die Abbildungen 1a), 1b), 1c) zeigen Relaisschaltungen, die die Grundoperationen lösen. G ist die Grundleitung, die immer Strom führt, der andere Batteriepol interessiert hier nicht, da es nicht darauf ankommt, geschlossene Stromkreise zu zeichnen.

Die Konjunktion wird durch Hintereinanderschalten, die Disjunktion durch Parallelschalten von Kontakten erreicht, während die Negation durch Ruhekontakt gebildet wird. An sich lassen sich diese Vorrichtungen noch vereinfachen; so ist ein Relais allein im stande, die Ausgabe der Konjunktion zu lösen, wenn man A anstelle von G legt, und die Disjunktion ist durch einfaches Zusammenlegen der Leitungen lösbar, denn wenn einer von beiden Leitern A oder B Strom führt, führt auch C Strom. Streng genommen müssen dann bei A und B Gleichrichter liegen, die nur eine Wirkung von A auf C und B auf C zulassen, nicht aber von A auf B und B auf A, da sonst ja $A \sim B$ ist, was zu Fehlern führen würde, wenn die Leiter A oder B noch in anderen Schaltungen eine Rolle spielen. Diese Gleichrichter lassen sich jedoch entsprechend 1b umgehen.

Es ist somit möglich, mit dem elektrischen Relais als einzigem Baustein jede dyadische Aufgabe zu lösen, indem man die Relais der Formel entsprechend schaltet. Die Tatsache, daß sich Rechenmaschinen nur mit Relais bauen lassen, ist bekannt. (Vergl. Deutsche Patentschrift 458 481). Allerdings ist die Methode für die gebräuchlichen im Dez.-Ssystem arbeitenden Maschinen weniger geeignet, jedoch ist sie ausgezeichnet geeignet, im Sekundalsystem zu arbeiten.

Im folgenden werden wir uns hauptsächlich mit Relaisschaltungen beschätigen. *Man kann die Dyadik als Schaltungsmathematik bezeichnen.*

Wir werden sehen, daß zu jeder Formel des Aussagenkalküls eine Schaltung gehört und umgekehrt, jede Schaltung durch eine Formel darstellbar ist. Die aufgestellten Regeln können dann benutzt werden, Schaltungen zu entwickeln, umzuformen, zu vereinfachen, miteinander zu überlagern oder den Nachweis zu erbringen, daß zwei Äußerlich verschiedene Schaltungen dieselbe logische Aufgabe lösen.

Da, wie wir später sehen werden, auch andere Relais als das elektromagnetische möglich sind und aus Gründen der Übersichtlichkeit wollen wir ein *neutrales Symbol* für ein Relais verwenden, und die damit aufgebauten Schaltungen „abstrakt“ nennen. Das Relais wird durch einen Kreis dargestellt, bei dem der gesteuerte Stromkreis durch einen durchlaufenden Strich dargestellt wird und der steuernde Pol rechtwinklich dazu an den Kreis herangeführt wird. Bei Negation wird noch ein schräger Strich in den Kreis gesetzt.

Die Abbildungen 3a, 3b, 3c zeigen die den Abb. 1a, 1b, 1c entsprechenden abstrakten Schaltungen.

Die Abbildung 4 zeigt die Regeln 1 – 15 als Schaltungen, wobei die nebeneinander stehenden Schaltungen Äquivalent sind.

Die Normalformen.

Die Logik lehrt, daß jede Formel des Aussagekalküls sowohl auf die konjunktive als auch auf die disjunktive Normalform gebracht werden kann. Entsprechend gibt es zwei Normalformen, auf die prinzipiell jede Schaltung gebracht werden kann.

Als Beispiel wollen wir die Aufgabe behandeln, aus dem Zahlenbereich $0000 - LLLL$ (0–15) den Intervall $LL0 - LLL0$ (6-14) zu trennen, d.h. die Formel aufstellen, die für alle Zahlen des Intervalles pos. lautet und für alle anderen neg. Wir nennen die 4 Ausgangdyaden $Z_3 Z_2 Z_1 Z_0$, die die Sekundalziffern darstellen, wobei der Index der Potenz von zwei der betreffenden Stelle entspricht. *Die disjunktive Normalform* ist bekanntlich die Aufzählung der Variationen der Ausgangsangaben, für welche das Resultat pos. ist.

$$\begin{array}{cc|cl}
6 & 0LL0 & & (\overline{Z_3} \& Z_2 \& Z_1 \& \overline{Z_0}) \\
7 & 0LLL & \vee & (\overline{Z_3} \& Z_2 \& Z_1 \& Z_0) \\
8 & L000 & \vee & (Z_3 \& \overline{Z_2} \& \overline{Z_1} \& \overline{Z_0}) \\
9 & L00L & \vee & (Z_3 \& \overline{Z_2} \& \overline{Z_1} \& Z_0) \\
10 & L0L0 & \vee & (Z_3 \& \overline{Z_2} \& Z_1 \& \overline{Z_0}) \\
11 & L0LL & \vee & (Z_3 \& \overline{Z_2} \& Z_1 \& Z_0) \\
12 & LL00 & \vee & (Z_3 \& Z_2 \& \overline{Z_1} \& \overline{Z_0}) \\
13 & LL0L & \vee & (Z_3 \& Z_2 \& \overline{Z_1} \& Z_0) \\
14 & LLL0 & \vee & (Z_3 \& Z_2 \& Z_1 \& \overline{Z_0}) \sim R
\end{array}$$

Wir wollen folgende vereinfachte Schreibweise benutzen:

$$\begin{array}{r|cccc|l}
 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & Z_0 & \\
6 & - & + & + & - & \\
7 & - & + & + & + & \\
8 & + & - & - & - & \\
9 & + & - & - & + & \\
10 & + & - & + & - & \sim R \\
11 & + & - & + & + & \\
12 & + & + & - & - & \\
13 & + & + & - & + & \\
14 & + & + & + & - &
\end{array}$$

Die Vorzeichen sind den über den Spalten stehenden Dyaden zugeordnet und besagen, ob diese pos. oder neg. in die Formel einzusetzen sind. Die nebeneinander stehenden Zeichen bilden eine Konjunktion, die untereinander stehenden

Konjunktionen sind disjunktiv verbunden. Solch ein Formbild ist mit Leichtigkeit in eine Schaltung zu übersetzen, wie es Abb. 5a zeigt. Es ist für jede Konjunktion ein Weg vorhanden, der über mehrere hintereinander geschaltete Relais führt; die übereinander liegenden Relais werden durch die gleiche Dyade gesteuert. Aus dieser ausgezeichneten disjunktiven Normalform lassen sich vereinfachte bilden, indem man verschiedene Konjunktionen durch Ausschalten der Differenzen (Regel 15) zusammenfaßt.

$$\begin{array}{l|cccc|l}
 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & Z_0 & \\
6,7 & - & + & + & & \\
8,9,10,11 & + & - & & & \\
12,13 & + & + & - & & \sim R \\
14 & + & + & + & - &
\end{array}$$

Eine weitere Vereinfachung ist durch Anwendung des zweiten distributiven Gesetzes möglich. (Gleiche Teile der Konjunktionen werden zusammengefaßt.)

$$\begin{array}{cccc}
Z_3 & Z_2 & Z_1 & Z_0
\end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ll}
- & + \quad + \\
+ & \left|\begin{array}{ll} - & \\ + & \left|\begin{array}{ll} - & \\ + & - \end{array}\right. \end{array}\right.
\end{array}\right| \sim R$$

Die gleiche Formel in der in der Logik üblichen Schreibweise würde lauten:

$$(\overline{Z_3}\&Z_2\&Z_1) \vee [Z_3\&(\overline{Z_2} \vee (Z_2\&(\overline{Z_1} \vee (Z_1\&\overline{Z_0}))))] \sim R$$

Man sieht leicht, daß zur Bildung von Schaltungen die Entwicklung der Formel in Rasterform übersichtlicher ist. Die Abb. 5b und 5c stellen die entsprechenden vereinfachten Schaltungen zu 5a dar.

Daß die Vereinfachung der Normalform viele Lösungen zuläßt, geht aus folgender Überlegung hervor: Man kann schematisch so vorgehen, indem man erst alle Konjunktionen zusammenfaßt, die ein positives Zeichen in der ersten Spalte haben, und alle mit einem negativen Zeichen. Für jede dieser Gruppen verführt man im Bezug auf die zweite Spalte ebenso und so fort, bis in die letzte Spalte. Man erhält dann das Bild einer Weichenstraße, die sich von einem Punkt nach verschiedenen Stellen ergießt. Nun kann man aber die Spalten nach dem kommutativen Gesetz vertauschen, es gehört also zu jeder Spaltenkommutation eine andere vereinfachte Form. Ja, man kann sogar innerhalb jeder Konjunktion eine andere Kommutation wählen, wenn man von dem Prinzip abweicht, daß übereinanderliegende Relais durch die gleiche Dyade gesteuert werden. Es ist daher in schwierigen Fällen gar nicht leicht, die einfachste Schaltung zu finden, d.h. die Schaltung, die die Aufgabe mit den wenigsten Relais löst.

Oft führt auch die Darstellung einer Formel durch ihr Gegenteil zu einer einfacheren Schaltung. Die disjunktive Normalform ist dann die Aufzählung der „ausgenommenen“ Variationen der Ausgangsdyaden. Die so ermittelte Dyade muß dann noch negiert werden. In unserem Beispiel stellen die Zahlen $0000 - 0L0L$ (0–5) und $LLLL$ (15) die Ausnahmen dar. Wir können also schreiben:

$$
\begin{array}{cc|cccc|l}
 & & Z_3 & Z_2 & Z_1 & Z_0 & \\
0 & 0000 & - & - & - & - & \\
1 & 000L & - & - & - & + & \\
2 & 00L0 & - & - & + & - & \\
3 & 00LL & - & - & + & + & \sim \overline{R} \\
4 & 0L00 & - & + & - & - & \\
5 & 0L0L & - & + & - & + & \\
15 & LLLL & + & + & + & + &
\end{array}
$$

Es lassen sich wieder einige Konjunktionen durch Ausschalten von Indifferenzen zusammenfassen.

$$
\begin{array}{l|cccc|l}
 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & Z_0 & \\
0,1,2,3 & - & - & & & \\
4,5 & - & + & - & & \sim \overline{R} \\
15 & + & + & + & + &
\end{array}
$$

An diesem Beispiel läßt sich auch zeigen, daß man mitunter durch „Erweitern“ (Regel 13) zu einfacheren Formeln kommt. Schreiben wir nämlich die Konjuktionen 0) und 1) zweimal, so kann man sie sowohl mit 2), 3) als auch mit 4), 5) zusammenfassen. Dadurch wird in der Schaltung ein Relais erspart.

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & Z_0 & \\
0,1,2,3 & + & - & & & \\
0,1,4,5 & - & & - & & \sim \overline{R} \\
15 & + & + & + & + &
\end{array}
$$

Schließlich ist noch folgende Zusammenfassung möglich:

$$
\begin{array}{r|c|ccc|l}
 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & Z_0 & \\
15 & & + & + & + & \\
 & + & & & & \\
0,1,2,3 & & - & & & \sim \overline{R} \\
0,1,4,5 & - & & - & &
\end{array}
$$

Abb. 5d stellt die letzte Form als Schaltung dar.

Man kann auch eine gemischte Darstellung wählen, indem man das Intervall 6-15 positiv darstellt und nur 15 ausnimmt.

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
 & Z_3 & Z_2 & Z_1 & Z_0 & \\
6,7 & - & + & + & & \\
8-15 & + & & & & \sim R_1 \\
15 & + & + & + & + & \sim R_1
\end{array}
$$

$$(R_1 \& \overline{R_2}) \sim R$$

Die entsprechende Schaltung zeigt Abb. 5e

Über die Darstellung durch Ausnahmen läßt sich leicht die andere, nämlich die *„konjunktive Normalform“* ableiten. Nach dem „Dualitätsprinzip“ bildet man nämlich das Gegenteil einer Formel, indem man die Ausgangsvariablen (Dyaden) negiert, (Vorzeichen umgekehrt), und die Zeichen & und $\vee$ miteinander vertauscht. Für Schaltungen lautet diese Regel: *Schalte hintereinander, was parallel geschaltet ist und umgekehrt, und ändere positiv in negativ arbeitende Relais und umgekehrt.*

Die konjunktive Normalform läßt sich mit Hilfe der Hilbertschen Symbolik folgendermaßen schreiben:

$$
\left|\begin{array}{c} \overline{Z_0} \\ \vee\overline{Z_1} \\ \vee\overline{Z_2} \\ \vee\overline{Z_3} \end{array}\right| \&
\left|\begin{array}{c} Z_0 \\ \vee\overline{Z_1} \\ \vee\overline{Z_2} \\ \vee\overline{Z_3} \end{array}\right| \&
\left|\begin{array}{c} \overline{Z_0} \\ \vee Z_1 \\ \vee\overline{Z_2} \\ \vee\overline{Z_3} \end{array}\right| \&
\left|\begin{array}{c} Z_0 \\ \vee Z_1 \\ \vee\overline{Z_2} \\ \vee\overline{Z_3} \end{array}\right| \&
\left|\begin{array}{c} \overline{Z_0} \\ \vee\overline{Z_1} \\ \vee Z_2 \\ \vee\overline{Z_3} \end{array}\right| \&
\left|\begin{array}{c} Z_0 \\ \vee\overline{Z_1} \\ \vee Z_2 \\ \vee\overline{Z_3} \end{array}\right| \&
\left|\begin{array}{c} Z_0 \\ \vee Z_1 \\ \vee Z_2 \\ \vee Z_3 \end{array}\right| \sim R
$$

Wir haben hier also eine Konjunktion von Disjunktionen. Jede einzelne Disjunktion sperrt eine Variation der Ausgangsdyaden und lässt alle anderen durch, während bei der disjunktiven Normalform jede einzelne Konjunktion nur eine Variation der Ausgangsdyaden durchlässt und alle anderen sperrt.

Wir wollen für die konjunktive Normalform folgende Darstellung in Rasterform wählen:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|l}
Z_0 & - & + & - & + & - & + & + & \\
Z_1 & - & - & + & + & - & - & + & \sim R \\
Z_2 & - & - & - & - & + & + & + & \\
Z_3 & - & - & - & - & - & - & + &
\end{array}
$$

Wieder sind nebeneinanderstehende Dyaden hintereinander und untereinanderstehende parallel geschaltet. Die entsprechende Schaltung zeigt Abb. 5f. Diese Form lässt sich ebenso wie die disjunktive Normalform vereinfachen. So zeigen Abb. 5g und 5h die entsprechenden disjunktiven Schaltungen zu 5c und 5d.

Aus Gründen, die wir später kennenlernen werden, hat die konjunktive Normalform für Schaltungen nicht die Bedeutung wie die disjunktive, entgegen der Logik, wo der konjunktiven Normalform die größere Bedeutung zukommt.

Wir wollen uns daher wieder der disjunktiven Normalform zuwenden und einmal die *Addition zweier Sekundalzahlen* $X * Y = Z$ behandeln. Der Vorgang ist ziffernweise periodisch. Für die i-te Stelle haben wir als Ausgangsdyaden die Ziffern X_i und Y_i und die Dyade U_i, die angibt, ob von der vorhergehenden Stelle $(i-1)$ eine Übertragung auf die Stelle i stattfindet, und als Resultatdyade die Ziffer Z_i und die Dyade U_{i+1}, die angibt, ob eine Übertragung auf die nächste Stelle $(i+1)$ stattfindet. Wir müssen also eine Formel $Z_i = F(X_i, Y_i, U_i)$ und $U_{i+1} = F(X_i, Y_i, U_i)$ aufstellen. Z_i ist positiv, wenn die Summe $(X_i + Y_i + Z_i) = L$ oder LL ist, U_{i+1}, wenn die Summe $= L0$ oder LL ist. Die disjunktiven Normalformen lauten also:

$$\begin{array}{r|ccc|l}
 & X_i & Y_i & U_i & \\
1) & + & - & - & \\
2) & - & + & - & \sim Z_i \\
3) & - & - & + & \\
4) & + & + & + & \\
\\
5) & - & + & + & \\
6) & + & - & + & \sim U_{i+1} \\
7) & + & + & - & \\
8) & + & + & + &
\end{array}$$

Zusammengefaßt:

$$\begin{array}{r|c|cc|l}
 & X_i & Y_i & U_i & \\
4) & + & + & + & \\
1) & & - & - & \\
 & & & & \sim Z_i \\
2) & - & + & - & \\
3) & & - & + &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|cc|c|l}
5) & - & + & & \\
6) & + & - & + & \sim U_{i+1} \\
7/8 & + & + & &
\end{array}$$

Das Problem wird später noch eingehender behandelt werden.

Prinzipiell läßt sich auch die Gesamtaufgabe der Addition zweier Sekundalzahlen auf die Normalform bringen, d.h. es läßt sich jede Ziffer Z_i als Funktion *aller* sie beeinflussenden vorangehenden Ziffern X und Y in der Normalform darstellen. Das ist praktisch aber unausführbar, da die Normalform ja die Aufzählung sämtlicher Variationen der Ausgangsdyaden darstellt, für die $Z_i = L$ ist. Die Anzahl der Variationen ist $\frac{2^{2(i+1)}}{2}$, wächst also sehr schnell, so daß die Aufgabe zergliedert werden muß. Es läßt sich ja auch jede arithmetische Rechnung auf eine einzige Formel bringen, in der nur die Ausgangswerte vorkommen und alle Zwischenwerte eliminiert sind. Die Geschicklichkeit eines Mathematikers zeigt sich aber gerade in vernünftiger Zergliederung der Aufgabe. Ebenso haben die Normalformen bei komplizierten Schaltungen nur eine theoretische Bedeutung, während es für die Praxis darauf ankommt, möglichst geschickt zu zergliedern.

So können die Normalformen dazu dienen, äußerlich verschiedenen Schaltungen miteinander zu vergleichen, indem beide auf die Normalform gebracht werden. Wir sehen aber, daß selbst bei einer so einfachen Aufgabe, wie der Addition zweier Sekundalzahlen diese Methode nicht stur anwendbar ist, sondern die Aufgabe in Einzelprobleme aufgelöst werden muß. Das ist nicht immer einfach, und in der theoretischen Behandlung von Schaltungen werden wir später auf ähnliche Probleme stoßen, wie sie in der formalen Logik unter den Namen „Funktionenkalkül", „Prädikatenkalkül", „Entscheidungsproblem" usw. bekannt sind.

Überlagerung von Schaltungen:

Haben zwei Formeln gleiche Ausgangsdyaden, so können die gleichen Formelteile zusammengefaßt werden. Als Beispiel sei die Zusammenfassung der Intervalle 6-14 und 4-11 durchgeführt. Das Intervall 6-14 ist bereits auf Seite 7 dargestellt. Das Intervall 4-11 hat folgende Formel:

$$\begin{array}{r|cccc|l} & Z_3 & Z_2 & Z_1 & Z_0 & \\ 5 & - & + & - & + & \\ 6\ 7 & - & + & + & & \sim R_1 \\ 8\ 9\ 10\ 11 & + & - & & & \end{array}$$

Überlagerung beider Formeln:

$$\begin{array}{r|cccc|l} & Z_3 & Z_2 & Z_1 & Z_0 & \\ 5 & - & + & - & + & \sim R_1 \\ 6\ 7 & - & + & + & & \\ 8\ 9\ 10\ 11 & + & - & & & \\ 12\ 13 & + & + & - & & \sim R_2 \\ 14 & + & + & + & - & \end{array}$$

Weiterhin vereinfacht:

$$\begin{array}{cc|cc|l} Z_3 & Z_2 & Z_1 & Z_0 & \\ & & - & + & \sim R_1 \\ - & + & & & \\ & & + & & \\ & - & & & \\ + & & - & & \\ & + & & & \sim R_2 \\ & & + & - & \end{array}$$

Die entsprechende Schaltung zeigt Abb. 6a. Die Pfeile deuten die erforderlichen Gleichrichter an. In den Schaltungen 6b und 6c sind diese durch weitere Relais vermieden.

Als weiteres Beispiel sei die Addition von Sekundalzahlen (vgl. Seite 10) gewählt. Unter Zuhilfenahme der Zwischendyade Z_i' ergeben sich folgende Formeln:

$$\begin{array}{lcll} (X_i \& \overline{Y_i}) & \vee & (\overline{X_i} \& Y_i) & \sim Z_i' \\ (U_i \& \overline{Z_i'}) & \vee & (\overline{U_i} \& Z_i') & \sim Z_i \\ (X_i \& Y_i) & \rightarrow & U_{i+1} & \\ (Z_i' \& U_i) & \rightarrow & U_{i+1} & \end{array}$$

Abb. 7 zeigt die entsprechende Schaltung.

Hierher gehört noch das Wählwerk im Sekundalsystem. Wir haben mehrere im Sekundalsystem numerierte Zellen, von denen eine herausgegriffen und mit A verbunden werden soll. Mit einem n- stelligen Wählwerk lassen sich 2^n Zahlen bedienen. Als Beispiel diene ein 3-stelliges Wählwerk für $2^3 = 8$ Zellen. Es zeigt Abb. 8a die Form, bei der für jede Zelle eine Konjunktion von 3 Relais vorgesehen ist, und Abb. 8b zeigt eine Überlagerung. Diese Art der Auswahl wird auch bei Fernschreibmaschinen angewandt, um aus den Fünferkombinationen die Buchstaben zu bilden.

Mehrschrittige Schaltungen.

Bisher wurde ein konstruktiv wichtiger Punkt außer acht gelassen: Die Wirkung eines Relais ist an eine bestimmte Zeit gebunden. Diese ist bei elektromagnetischen Relais durch die Trägheit des Ankers gegeben. So lösen z.B. die Schaltungen 9a und 9b je die Aufgabe

$$(A_1 \& A_2 \& A_3 \& A_4) \sim R$$

sind also logisch gleichwertig. In der Arbeitsweise besteht aber ein wesentlicher Unterschied; bei 9a führt ein direkter Weg über alle Relais, während bei 9b die Relais nacheinander wirken, da der gesteuerte Pol des einen steuernd auf das nächste Relais wirkt. Die Schaltung 9a ist „einschrittig“ und die Schaltung 9b „dreischrittig“. Wir haben in den vorhergehenden Beispielen bereits unbewußt mehrschrittige Schaltungen angewandt, z.B: 5d, 5e, 5g, 6b, 6c, 7. Eine einschrittige Schaltung liegt dann vor, wenn sämtliche Relais durch die Ausgangsdyaden gesteuert werden. Bei mehrschrittigen Schaltungen werden die Resultatdyaden gewissermaßen stufenweise errechnet. Eine zweischrittige Schaltung ist z.B. erforderlich, wenn wir wie bei 5d einen Wert R durch die Darstellung von $\overline{R}$ ermitteln. $\overline{R}$ muß dann noch negiert werden, um R zu erhalten; das ist aber im gleichen

Schritt nicht möglich. Desgleichen brauchen wir zweischrittige Schaltungen, wenn Gleichrichter vermieden werden sollen. (z.B. Abb. 6b, 6c).

Wir werden sehen, daß sich alle komplizierten Aufgaben nur durch mehrschrittige Schaltungen einfach lösen lassen. Es läßt sich jedoch prinzipiell jede mehrschrittige Schaltung auf eine einschrittige zurückzuführen; denn jede Schaltung ist durch eine logische Formel darstellbar, und jede Formel läßt sich auf die disjunktive und konjunktive Normalform bringen. Diese sind aber einschrittig.

Kreisläufe.

Handelt es sich um Aufgaben mit periodisch wiederkehrenden Teilen, so können hierfür dieselben Relais immer wieder verwandt werden. Hier tritt die Frage auf, nach wieviel Schritten ein Relais technisch in der Lage ist, eine neue Aufgabe zu lösen. Das elektromagnetische Relais kann schnellstens zweischrittig arbeiten, mechanische Relais brauchen mindestens drei Schritte. Aus konstruktiven und weiteren an anderer Stelle behandelten Gründen hat sich das vierschrittige „Spiel“ als besonders praktisch ergeben. Zu jedem Schritt gehört eine einschrittige Teilschaltung, deren Relais durch die Resultatdyaden der vorhergehenden Teilschaltung gesteuert werden, und deren Resultatdyaden die Relais der nächsten Teilschaltung steuern. Da die Relais im kreisenden Rhythmus in Tätigkeit treten, müssen die Grundpole der einzelnen Teilschaltungen durch einen Impulsgeber nacheinander Impulse bekommen. Auf diese Weise ist ein zeitlich genaues Arbeiten der Maschine gewährleistet. Abb. 10 zeigt die Grundform eines vierschrittigen Kreislaufes mit je einem Relais pro Schritt. Ist dieser Kreislauf einmal über A angeregt, so kreist der Impuls dauernd.

Als Beispiel eines rechnenden Kreislaufes sei wieder die Addition im Sekundalsystem behandelt. Wir können hierfür die Schaltung 7 verwenden, indem wir sie entsprechend Abb. 11 zu einem zweistufigen Kreislauf umformen. Die Relais 1-7 gehören zu Schritt I, die Relais 8-14 zu Schritt II. In den Relais 1,2,3,4 wird die Dyade $Z^{'}$ (vgl. Seite 12) gebildet. Die Relais 5 und 6 lösen die Aufgabe $(X \& Y) \rightarrow U$. Relais 7 überträgt die Angabe U der vorigen Rechnung auf die Schaltung des Schrittes II. In den Relais 8,9,10,11 wird aus $Z^{'}$ und U die Ziffer Z des Resultates gebildet. Die Relais 12,13,14 ergeben wieder U, das sofort für das nächste Spiel auf das Relais 7 zurückübertragen wird. Bei dieser Schaltung müssen die Ziffern X und Y fortlaufend nacheinander eingestellt werden, ebenso erscheint das Resultat ziffernweise bei Z.

Eine Schaltung, bei der alle Ziffern zugleich eingestellt werden können, erhält man, indem man jeder Stelle eine solche Schaltung zuordnet. Abb. 12 zeigt eine solche Schaltung für dreistellige Summanden. Die Berechnung des Resultats erfolgt aber auch hier schrittweise von der kleinsten Stelle aufwärts.

Abb. 13 zeigt dagegen eine Schaltung, bei der die Lösung der Aufgabe für alle Stellen zugleich in 4 Schritten erfolgt. Für jede Stelle kann die Ziffernsumme $0L$ oder $L0$ sein: Eine Übertragung auf die nächste Stelle findet bei Ziffernsumme 0 auf keinen Fall, bei Ziffernsumme $L0$ auf jeden Fall statt, und bei Ziffernsumme L wird eine von der unteren Stelle kommende Übertragung auf die nächste Stelle weitergegeben. Dementsprechend wird im ersten Schritt die Ziffernsumme gebildet; dadurch werden die Übertragungsrelais der Stufe II so gesteuert, daß bei Ziffernsumme $L0$ der Stelle i das Übertragungsglied U_{i+1} an den Grundpol II und bei Ziffernsumme L an das vorhergehende Glied U_i angeschlossen wird. Durch diese Schaltung ist die Übertragung über sämtliche Stellen in einem Schritt möglich. Das Resultat ergibt sich dann im Schritt III aus der Ziffernsumme und den Angaben der Stellenübertragung. Im Schritt IV[1] wird nun der Kreislauf geschlossen, indem das errechnete Resultat auf die Summanden-Einstellglieder Y zurückübertragen wird. Stellt man nun fortlaufend bei X die Summanden ein, so werden diese aufaddiert.

Das Speicherrelais.

Die bisherigen Schaltungen sind so aufgebaut, daß die in einem Schritt errechneten Dyaden im nächsten wieder benutzt werden. Die Wirkung eines Stromimpulses muß bis in den nächsten Schritt reichen, um die Relais der nächsten Schaltung zu steuern. Bei elektrischen Relais gibt es hierfür verschiedene Möglichkeiten, z.B. Stromstoßüberschneidung, Selbsthaltekreis und Abfallverzögerung. Nun kann es aber vorkommen, daß eine Dyade erst in viel späteren Sritten gebraucht wird; sie muß dann gespeichert werden. Diese Aufgabe lässt sich mit Hilfe eines elektrischen Relais mit Selbthaltekreis lösen. Solch ein Relais sei als Speicherrelais bezzeichnet. Die symbolische Darstellung zeigt Abb. 14. Abb. 15 zeigt eine Gruppe von Speicherrelais mit einer gemeinsamen Selbsthalteleitung S. Durch ein Löschrelais L (Ruhekontakt) kann der Selbsthaltekreis unterbrochen werden, wodurch die Einstellung gelöscht wird.

Zerlegung von Schaltungen in Teilschaltungen

Wir werden nun dazu kommen, aus Einzelschaltungen Schaltungen größeren Umfangs aufzubauen. Um nicht die gesamte Schaltung in allen ihren Teilen zeichnen zu müssen, sollen wiederkehrende Teile nur symbolisch angedeutet werden.

Schneiden wir aus einer Schaltung ein beliebiges Stück heraus, so erhalten wir eine Teilschaltung. Diese steht durch ihre „Ansclüsse“ mit der übrigen Schal-

[1] nicht gezeichnet

tung in Verbindung. Die Anschlüsse sind Dyadenträger und können in Bezug auf die Teilschaltung Ausgangs- oder Resultalsdyaden übertragen. Ferner sind sie gekennzeichnet durch die Nummer des Schrittes, in dem sie in Tätigkeit treten. Eine Teilschaltung braucht nur einmal mit klarer Kennzeichnung ihrer Anschlüsse gezeichnet zu werden. Wird sie in eine größere Schaltung eingesetzt, so genügt es, sie durch ein Rechteck anzudeuten, in dem eine der Schaltung zugeordnete Bezeichnung steht. Es brauchen dann nur die Anschlüsse zu den übrigen Teilen der Gesamtschaltung gezeichnet zu werden. Solche Teilschaltungen können dann wieder zu höheren Teilschaltungen zusammengefasst werden und so fort.

Als Beispiel wollen wir eine Additionsvorrichtung im Secundalsystem aus Teilschaltungen aufbauen. Wir verwenden die Schaltung entsprechend Abb. 13. Als Teilschaltung dient die Schaltung für eine Stelle (Abb. 16a). Als Anslüsse haben wie die Ziffern der Summanden X_i und Y_i, die Ausgangsdyaden darstellen und die Ziffer des Resultats Z_i, die eine Resultatdyade darstellt. Ferner haben wir noch die Übertragungsangaben U_i (Ausgangsdyade) und U_{i+1} (Resultatdyade). Die Zusammensetzung der Teilschaltungen zeigt Abb. 16b. Diese lässt sich wieder als Teilschaltung darstellen mit Ausgangsgliedern X_0-X_7, Y_0-Y_7 und den Resultatgliedern Z_0-Z_8. Ferner haben wie noch die Übertragungsangabe U_0, die zur Einführung der fliegenden L bie Subtraktion durch Addition des Supplements benutzt werden kann. U_8 ist identisch mit Z_8. Abb. 16c zeigt die Additionsschaltung wieder als Teilschaltung, wie sie nun als Additionsvorrichtung in Rechenmaschinen eingesetzt werden kann.